Poznámočky k Semináru

Marián Pilc

Abstrakt

V tomto seminári je urobený výklad Diracovského algoritmu pre systémy s väzbami. V úvode je stručne zhrnuté kanonické kvantovanie pre regulárne teórie. Používajú sa tam výrazy, o ktorých sa predpokladá, že by mali byť známe čitatelovi z prednášok teoretickej mechaniky, prípadne z matematickej fyziky. Prvá časť je venovaná klasickej úrovni a druhá sa zaoberá kvantovou teóriou. Celý seminár je doplnený nie len jednoduchými tzv. hračkárskymi príkladmi, ale aj príkladmi, ktoré majú reálny fyzikálny zmysel. Ďalej je skúmaný obsah pojmu časový vývoj, keď daný fyzikálny systém nemá skutočný hamiltonián.

Obsah

1 Čo vieme o hamiltonizácii a kvantovaní regulárnych teórií?

1.1 Klasická úroveň

Máme klasický systém, ktorého časový vývoj je popísaný lagrangiánom L. Pohybové rovnice dostaneme variáciou účinku $S = \int L dt$

$$-\frac{\delta S}{\delta q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{1}$$

Z pohybových rovníc (1) zistíme, že sa zachováva (ak $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) veličina

$$E(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L.$$

Túto veličinu nazveme energiou systému.

Ďalej si zaveďme pojem kanonickej hybnosti

$$p(q, \dot{q}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \tag{2}$$

Ak existuje inverzné zobrazenie medzi $\dot{q}$ a p

$$\dot{q} = \overline{V}(q, p), \tag{3}$$

tak sa teória nazýva regulárna a my vieme prejsť k hamiltonovskému formalizmu pomocou Legendreovej transformácie. Zaveďme si pojem hamiltoniánu

$$H := E|_{\dot{q}=\overline{V}(q,p)} \tag{4}$$

Pohybové rovnice (1) môžme prepísať do Hamiltonovskej formy.

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \{q, H\} \\ \dot{p} &= \{p, H\} \end{aligned} \tag{5}$$

kde

$$\{A, B\} := \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}$$

sú Poissonove zátvorky pre ľubovoľné fyzikálne veličiny A, B. Pomocou Poissonových zátvoriek môžme napísať totálnu časovú deriváciu funkcie A na fázovom priestore ako

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

1.2 Kvantová úroveň

Kuchársky recept na kvanovanie [1]
-ak náš fázový priestor je typu[2] T^*M, tak si zavedieme do hry Hilbertov priestor $H = L^2(M, d\mu)$ fyzikálnych stavov. Stavu priradíme lúč v H
-funkciám na fázovom priestore priradíme (!!!nejednoznačne!!!) operátory na $L^2(M, d\mu)$ tak, aby platilo:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\widehat{\{A, B\}}$$

-reálnym fyzikálnym veličinám zodpovedajú samoadjungované operátory
-časový vývoj kvantového systému je popísaný Schrödingerovou rovnicou

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi >= \hat{H}|\psi >$$

Toto ale cele zlyhá, keď sa začneme zaujímať o systémy, ktoré nie sú regulárnymi. To, že také systémy existujú a sú fyzikálne najzaujímavejšie, si ukážeme teraz.

1.3 Príklady ukazujúce nedostatočnosť iba "regulárneho" kanonického kvantovania

Uvažujme lagrangián prislúchajúci elektromagnetickému poľu

$$L = \int -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^3x, \tag{6}$$

kde

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

je intenzita ELMAG poľa. Táto intenzita je antisymetrická v indexoch μ, ν. Časové derivácie obsahuje len člen typu $F_{0\mu}$, člen typu F_{00} je identicky nulový. Lagrangián teda vôbec neobsahuje časovú deriváciu A_0. Z toho je jasné, že neexistuje inverzný vzťah medzi p^0 a $\dot{A}_0$. Ako dôsledok máme, že nemôžeme použiť predchádzajúcu schému hamiltonizácie a kvantovania.

Ďalší príklad na neregulárnu teóriu je relativistická častica. Jej lagrangián je

$$L = -m\sqrt{-u^2}, \tag{7}$$

kde u je (4)rýchlosť častice. Pre kanonickú hybnosť (2) máme vyjadrenie

$$p_\mu = m\frac{u_\mu}{\sqrt{-u^2}}. \tag{8}$$

[1] Toto je len stručné zhrnutie, ktoré nie je presne definované. Presnú matematickú formuláciu kanonického kvantovania obsahuje časť 3.

[2] Ak to tak nie je, celá vec sa ešte viac komplikuje, takže mi budeme uvažovať prípady, keď to platí.

Ak teraz zrátame štvorec hybnosti, dostaneme väzbu na hybnosti

$$p^2 + m^2 = 0, \tag{9}$$

ktorá nám hovorí, že namiesto pôvodných štyroch stupňou voľnosti máme len tri. Ak zrátame hessián[3], zistíme, že je nulový a my nie sme schopní vyjadriť všetky rýchlosti cez hybnosti. Zase tu nemôžme použiť našu starú známu hamiltonizáciu.

Ako posledný príklad spomeňme gravitáciu. Vo všeobecnej teórii relativity máme gravitáciu popísanú cez metriku časopriestoru. Avšak nie každá zložka metrického tenzora nám vstupuje rovnako do lagrangiánu. Zložky $g_{0\mu}$ tam vstupujú bez časovej derivácie, teda zase ich nevieme vyjadriť cez hybnosti a štandartný proces zase zlyháva.[4]

Toto bolo len zopár teórií, ktoré sa takto kvantovať nedajú, ale napríklad celý štandartný model má takúto štruktúru. Takže, keď si to zhrnieme, celú fyziku vieme robiť len cez lagrangiány, teda na klasickej úrovni (Teraz sme naschvál nespomenuli kvantovanie cez dráhové integrály, ktoré nemá dobrý matematický základ.). Ako teda pokračovať si ukážeme teraz. Začnime s klasickou úrovňou!

2 Hamiltonizácia singulárnych teórií

V tejto časti sa naučíme ako hamiltonizovať teórie, o ktorých sme si pred chvíľou hovorili a nevedeli sme čo s nimi. Najprv si ukážeme základnú teóriu ako treba postupovať na ceste k hamiltoniánu, potom túto teóriu aplikujeme na jednoduché príklady, kde pochopíme ľahšie celú vec. Všimneme si, že teória dáva v istých prípadoch nejednoznačné výsledky a dáme tomu aj fyzikálny zmysel. V poslednej časti si preberieme ako príklad vektorové pole s hmotnosťou a aj bez hmotnosti a uvidíme, že hmotnostný člen nám narušuje kalibračnú voľnosť.

2.1 Základná teória

Teraz sa zas vráťme k našemu klasickému systému. Jeho časový vývoj je popísaný pohybovými rovnicami (1). Problém v hamiltonizácii bol spôsobený tým, že sme nevedeli vyjadriť všetky hybnosti p cez rýchlosti $\dot{q}$. Rozšírme si preto náš priestor z funkcií q aj na funkcie v, kde v budú predstavovať rýchlosti. To, že sa $v = \dot{q}$, však predstavuje väzbu, ktorú musíme uvažovať. Zapíšme si to matematicky. Miesto $\dot{q}$ píšme v

$$L^v(q, v) := L(q, \dot{q})|_{\dot{q}=v}.$$

[3]Pozri 2.1

[4]Celé je to trošku komplikovanejšie, lebo Hilbertov účinok obsahuje aj druhú deriváciu, ale tá sa dá odstrániť, lebo má tvar divergencie.

K našemu lagrangiánu pridáme väzbu $\dot{q}-v=0$, lagrangeove multiplikátory označíme p a dostaneme modifikovaný účinok

$$S=\int [L^v+p(\dot{q}-v)]dt. \tag{10}$$

Variáciou účinku dostaneme pohybové rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta v} &= \frac{\partial L^v}{\partial v}-p=0,\\
\frac{\delta S}{\delta p} &= \dot{q}-v=0,\\
\frac{\delta S}{\delta q} &= \frac{\partial L^v}{\partial q}-\dot{p}=0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Vidíme, že rovnice sú tie isté ako (1).

Skúmajme teraz podrobnejšie rovnicu

$$\frac{\delta S}{\delta v}=\frac{\partial L^v}{\partial v}-p=0.$$

Táto rovnica nám určuje lagrangeove multiplikátory p, ktoré sú mimochodom kanonické hybnosti (2), ako funkcie t.

Ďalej sa pokračovalo tak, že sme rýchlosti vyjadrili cez kanonické hybnosti. Toto môžme urobiť len, keď Hessova matica

$$M:=\frac{\partial^2 L^v}{\partial v \partial v} \tag{12}$$

je regulárna, teda ak hessián $\det|M|$ je nenulový. Takéto lagrangiány budeme nazývať regulárnymi. V opačnom prípade im hovoríme singulárne.

Ak má Hessova matica (12) rang r, tak vieme vyjadriť r rýchlostí, označme ich $V=\overline{V}(q,p,\lambda)$, cez q a p. Zvyšné označíme λ. Ešte sa dohodnime na notácii

$$\overline{F}(q,p,\lambda)=F(q,v)|_{V=\overline{V}(q,p,\lambda)}$$

Pokračujme teraz ďalej v skúmaní prvej z rovníc (11). Rozdeľme si to na dve časti.

1) $v=V$

$$\overline{\frac{\delta S}{\delta V}}=\overline{\frac{\partial L^v}{\partial V}-p}=p-p=0$$

identicky.

2) $v=\lambda$. Označme

$$\Phi^{(1)}=-\overline{\frac{\delta S}{\delta \lambda}}=\overline{p-\frac{\partial L^v}{\partial \lambda}}$$

Tento výraz sa rovná nule iba preto, že to je dôsledok pohybových rovníc, je to väzba na q a p. $\Phi^{(1)}$ neobsahuje λ, lebo ak by obsahoval nejakú λ', tak z podmienky $\Phi^{(1)} = 0$ by som vedel vyjadriť túto λ', čo je v spore s tým, že M má rang r.

Definujme si teraz funkciu

$$H^*(q,p,v) := pv - L^v. \tag{13}$$

Keď teraz miesto V dosadíme $\overline{V}$ dostaneme funkciu iba q, p a λ. Túto funkciu nazvem hamiltonián s primárnymi väzbami. Zmysel názvu bude jasný o chvíľu.

$$H^{(1)} = \overline{H^*} \tag{14}$$

Všimnime si podrobnejšie jeho štrukúru. Podobne ako v regulárnom prípade sa zachováva veličina

$$E^v := \frac{\partial L^v}{\partial v} v - L^v \tag{15}$$

ktorú nazveme energiou a veličinu

$$H = \overline{E^v} \tag{16}$$

skutočným, pravým, alebo len stručne hamiltoniánom. Teraz sme pripravení urobiť dôkladnú analýzu výrazu (14).

$$\begin{aligned}
H^* &= p.v - L^v = \\
&= p.v - L^v + \frac{\partial L^v}{\partial v} v - \frac{\partial L^v}{\partial v} v = \\
&= E^v + \frac{\partial (pv - L^v)}{\partial v} v = \\
&= E^v + \frac{\partial H^*}{\partial v} v
\end{aligned}$$

Keď teraz do toho dosadíme $\overline{V}$

$$\begin{aligned}
H^{(1)} &= \overline{H^*} = \\
&= \overline{E^v + \frac{\partial H^*}{\partial v} v} = \\
&= H + \lambda \Phi,
\end{aligned}$$

kde sme využili

$$\overline{\frac{\partial H^*}{\partial V}} = \overline{p - \frac{\partial L^v}{\partial V}} = 0$$

a

$$\overline{\frac{\partial H^*}{\partial \lambda}} = \overline{p - \frac{\partial L^v}{\partial \lambda}} = \Phi^{(1)}.$$

H nezávisí na λ. Dôkaz je veľmi jednoduchý.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{H^*}}{\partial \lambda} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} + \Phi^{(1)} \\
\frac{\partial \overline{H^*}}{\partial \lambda} &= \overline{\frac{\partial H^*}{\partial V}} \frac{\partial \overline{V}}{\partial \lambda} + \overline{\frac{\partial H^*}{\partial \lambda}} = \Phi^{(1)} \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0
\end{aligned}$$

2.2 Hračkárske modely

Teraz sa pohráme s jednoduchými modelmi, aby sme lepšie pochopili celý proces hamiltonizácie. Uvidíme, že veta o jednoznačnosti riešenia neplatí. V ďalšej časti si ukážeme aký má toto fyzikálny zmysel.
1) Ako prvý model skúmajme systém popísaný lagrangiánom

$$L = \frac{1}{2}(\dot{u} + \dot{v})^2 - \frac{1}{2}(u^2 + v^2). \tag{17}$$

Kanonické hybnosti sú

$$p_u = p_v = \dot{u} + \dot{v}.$$

Hessova matica

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

je evidentne singulárna.

2.3 Teórie s nejednoznačným časovým vývojom. Kalibračná voľnosť. Diracove premenné

2.4 "Elektromagnetické" pole s hmotnosťou a bez hmotnosti. Narušenie kalibračnej voľnosti

3 Kvantovanie systémov s väzbami

V tejto stati si ukážeme veľmi šikovnú metódu ako kvantovať systémy s väzbami prvého druhu. Táto metóda bola vyvynutá s úmyslom aplikovať ju na všeobecnú teóriu relativity, konkrétne na slučkovu teóriu(pozri [5]). Ide v podstate o presné matematické formulovanie algebraického kvantovania. Forma, ktorú si tu ukážeme je vlastne "prekopírovaná" z [2]. Treba ešte poznamenať, že bola aplikovaná so slučkovími technikami aj na voľnú strunu, kde sa následne zistilo, že žiadna kritická dimenzia neexistuje, že teória je bez anomálií, duchov, tachyónov atď, čo boli vlastne len dôsledky Fockovskej reprezentácie[4].

3.1 Kuchársky recept alebo Refined Algebraic Quantization

Uvažujme klasický systém s väzbami C_i, ktoré sú prvého druhu. Fázový priestor Γ nech je reálna symplektická varieta modelovaná nad nejakým Banachovým priestorom. Našou nasledujúcou úlohou bude kvantovanie uvažovaného klasického systému. Rozdelíme si túto úlohu do šiestich krokov.

Krok č.1
Vyberme vektorový podpriestor $\mathcal{S}$ hladkých komplexných funkcií na Γ tak, aby spĺňal nasledujúce podmienky:
(a) $d\mathcal{S}$ generuje celý kodotykový priestor na Γ,
(b) $\mathcal{S}$ je uzavretý priestor vzhľadom na Poissonove zátvorky,
(c) $\mathcal{S}$ je uzavretý na operáciu komplexného združenia.
Každý prvok z $\mathcal{S}$ budeme nazývať základnou klasickou premennou. Táto množina v ďaľšom poslúži ako stavebný kameň pre konštrukciu Hilbertovho priestoru. Každému prvku z $\mathcal{S}$ priradíme jednoznačne kvantový analóg. Postúpme teda k ďaľšiemu kroku.

Krok č.2
Priraďme každému prvku F z $\mathcal{S}$ abstraktný operátor $\hat{F}$. Zkonštrulujme voľnú asociatívnu algebru[5] generovanú tímito abstraktnými operátormi. O násobení predpokládame, že spĺňa kanonické komutačné vzťahy $[\hat{F}, \hat{G}] = i\hbar\widehat{\{F, G\}}$. Označme túto algebru $\mathcal{B}_{aux}$.

Krok č.3
Zaveďme na tejto algebre operáciu involúcie $*$, tak aby pre všetky $F^* = G$ z $\mathcal{S}$ platilo $\hat{F}^* = \hat{G}$. Označme túto algebru $\mathcal{B}^*_{aux}$.

Krok č.4
Nájdime lineárnu $*$-reprezentáciu $\mathcal{R} : \mathcal{B}^*_{aux} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{aux})$, teda $\mathcal{R}(\hat{F}^*) = \mathcal{R}(\hat{F})^\dagger$ pre všetky $\hat{F}$ z $\mathcal{B}^*_{aux}$. $\mathcal{H}_{aux}$ je Hilbertov priestor, ktorý nazveme pomocným, $\dagger$ je hermitovské združenie vzhľadom ku skalárnemu súčinu na $\mathcal{H}_{aux}$ a $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{aux})$ je množina linárnych operátorov (aj neohraničených) na $\mathcal{H}_{aux}$. Pomocou tohto Hilbertovho priestoru skonštrulujeme fyzikálny Hilbertov priestor.

Krok č.5
V tomto kroku skonštrulujeme fyzikálny Hilbertov priestor.
(a) Vyjadrime väzby C_i ako samozdužené operátory na $\mathcal{H}_{aux}$.
(b) Vyberme lineárne operátory na $\mathcal{H}_{aux}$, ktoré komutujú s väzbami a zároveň a aj ich združenia komutujú s väzbami. Takúto množinu operátorov označíme $\mathcal{B}^*_{phys}$. Zvoľme hustý podpriestor $\Phi \subset \mathcal{H}_{aux}$, taký aby ho väzby a množina $\mathcal{B}^*_{phys}$ zobrazovali do seba. Na tejto množine je $\mathcal{B}^*_{phys}$ $*$-algebrou. Túto algebru nazveme algebrou fyzikálnych pozorovateľných.
(c) Nájdime antilineárne zobrazenie $\eta : \Phi \to \Phi^*$, kde Φ^* je duál k Φ, ak je na Φ zavedená nejaká topológia, tak máme na mysli topologický duál, ináč algebraický. Chceme, aby toto zobrazenie spĺňalo nasledujúce podmienky:

(i) $\forall \phi_1 \in \Phi$, $\eta\phi_1$ rieši väzby, t.j.

$$0 = (\hat{C}_i\eta\phi_1)[\phi_2] := \eta\phi_1[\hat{C}_i\phi_2]$$

pre všetky $\phi_2 \in \Phi$.

[5] T.j. algebru s násobením, ktoré je asociatívne a obsahujúcu všetky polynómy.

(ii) η je reálne a pozitívne, t.j.

$$\begin{aligned}(\eta\phi_1)[\phi_2] &= ((\eta\phi_2)[\phi_1])^* \\ (\eta\phi_1)[\phi_1] &\geq 0 \\ (\eta\phi_1)[\phi_1] = 0 &\Leftrightarrow \eta\phi_1 = 0\end{aligned}$$

(iii) η komutuje s akciou ľubovoľného A z $\mathcal{B}^*_{phys}$, t.j.

$$(\eta\phi_1)[A\phi_2] = (\eta A^\dagger\phi_1)[\phi_2]$$

pre všetky $\phi_{1,2}$ z $\mathcal{B}^*_{phys}$.

(d) Teraz zavedieme priestor fyzikálnych stavov, ktorý vo vhodnej topológii uzavrieme a dostaneme fyzikálny Hilbertov priestor. Definujme $\mathcal{V}_{phys} := \mathrm{Span}_\Phi\{\eta\phi\}$. Na tomto vektorovom priestore definujme skalárny súčin

$$\langle\eta\phi_1, \eta\phi_2\rangle := (\eta\phi_2)[\phi_1].$$

Vďaka vlastnostiam (i) až (iii) v (c) je to skutočne dobre definovaný skalárny súčin. Teraz zúplnime priestor $\mathcal{V}_{phys}$ a dostaneme Hilbertov priestor fyzikálnych stavov, t.j.

$$\mathcal{H}_{phys} := \overline{\mathcal{V}_{phys}}.$$

Krok č.6

Definujme akciu operátorov $A \in \mathcal{B}^*_{phys}$ na fyzikálnom Hilbertovom priestore, tak že pre všetky $\phi \in \Phi$

$$A_{phys}(\eta\phi) := \eta(A^\dagger\phi)$$

Treba poznamenať, že ak $A = A^\dagger$, tak operátor A_{phys} s definičným oborom $\mathcal{V}_{phys}$ je v podstate samozdružený.

Ako uvidíme na príklade relativistickej častice, tak niektoré podmienky kladené v krokoch sú až príliž silné, takže toto je len ten ideálny prípad. V skutočnosti to môže byť celé úplne iné. Napríklad požiadavok aby Γ bola varieta modelovaná nad nejakým Banachovým piestorom je niekedy až moc silný, pozri [3]. Ďalej v príklade uvidíme, že ani v konečnorozmerných systémoch nejde všetko jednoducho, napríklad budeme mať problém definovať operátor pre čas "t", ale keďže t nie je Diracova premenná, tak na fyzikálnej úrovni už nie sú žiadne problémy. Tak nemá zmysel zahadzovať takto skonštruovanú teóriu iba preto, že nebola skonštruvaná presne podľa týchto šiestich krokov. Ďalej treba povedať, že sme sa obmedzili iba na silné Diracove premenné, v niektorých prípadoch môžu existovať slabé Diracové premenné, ktoré nie sú ekvivalentné so žiadnou silnou Diracovskou pozorovateľnou, tak tieto prípady, treba vyšetrovať zvlášť.

Toto je iba kvantovací program, nie vždy musí dať riešenie. Ale keď už dá tak máme kvantovú teóriu, ktorá vyhovuje všetkým základným postulátom kvantovej teórie a odráža algebraické vlastnosti klasickej. Ďalšie konkrétnejšie treba skúmať podrobnejšie, napríklad s experimentom.

3.2 Kvantovanie hračkárskych modelov

4 Relativistická častica

KLASICKÁ ÚROVEŇ

V tejto časti sa budeme venovať relativistickej častici na Minkovskom pozadí v inerciálnych súradniciach. Jej Lagrangeián je

$$L = -m\sqrt{-u^2},$$

kde $u = (\lambda, v)$, je štorrýchlosť častice, λ je jej časová a v priestorová časť. Keďže akcia daná týmto Lagrangeiánom je invariantná voči zámene "vlastného času" $\tau \to \tau'(\tau)$, tak u nie je normované na (mínus) jednotku. O u predpokladáme, iba to, že leží v budúcom svetelnom kuželi, t.j. $-u^2 > 0$ a $\lambda > 0$. Konfiguračný priestor je daný štvoricou $(t, x) \in \mathbb{R}^4$. Priestorové kanonické hybnosti sú

$$p = \frac{mv}{\sqrt{\lambda^2 - v^2}}$$

a časová

$$E = -p_t = \frac{m\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - v^2}}.$$

Z podmienky, že u je z budúceho svetelného kužela máme $E > 0$. Ale čo je dôležité, tak to platí aj naopak, teda ak E je kladné, tak u leží v budúcom svetelnom kuželi.
Hamiltonián je

$$H^{(1)} = \lambda C = \lambda(\sqrt{p^2 + m^2} - E),$$

kde C je väzba.
Z podmienky $\{F, H\} = 0$ nájdeme, že každá silná Diracova pozorovateľná je funkciou p, E, x_0, kde

$$x_0 = x - \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}}t.$$

KVANTOVÁ ÚROVEŇ

Aplikujme teraz RAQ na relativistickú časticu. Veberme si priestor $\mathcal{S} = \mathrm{Span}\{x, p, \Omega, E\}$, kde $\Omega = Et$. Medzi základné pozorovateľné sme nevybrali t, kvôli tomu, že keď si spomenieme na časticu na polpriamke, tam nastáva podobný problém, že nevieme vyjadriť hybnosť v reprezentácii, kde $\hat{x} = x$. Ak zvolíme $\hat{p} = -i\partial_x$, tak tento operátor je iba symetrický a nemá samozdružené rozšírenie. Tu je to to isté, tak sme radšej zvolili Ω.
Poissonove zátvorky sú

$$\{x, p\} = 1, \quad \{\Omega, E\} = -E, \quad \text{a ostatné sú nulové}$$

Priraďme teraz premenným z $\mathcal{S}$ operátory na $\mathcal{H}_{aux} = \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3; \frac{dE}{E}dp\right)$ nasledujúcim spôsobom

$$\begin{aligned} \hat{x} &= i\partial_p, & \hat{p} &= p, \\ \hat{\Omega} &= -iE\partial_E, & \hat{E} &= E, \end{aligned}$$

Všetky operátory sú na danom Hilbertovom priestore samozdružené o čom sa dá ľahko presvedčit napríklad výpočtom indexov defektu. Prienik definičných oborov daných operátorov je nadmnožinou hladkých funkcií s kompaktným nosičom $C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$, tak dané operátory generujú $*$-algebru $\mathcal{B}^*_{aux}$. Tým sme vlastne vyplnili kroky 2 až 4.
Teraz sa vrhneme na ten najdôležitejší krok a to krok č.5. Väzbe priradíme operátor násobenia, čiže $\hat{C} = \sqrt{p^2+m^2} - E$. Ako vhodný podpriestor zvolíme priestor hladkých funkcií s kompaktným nosičom $C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$.
To asi najdôležitejšie, čo potrebujeme je nájsť η zobrazenie. Ľahko sa zistí, že

$$\eta\phi_1[\phi_2] = \int\limits_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3} \frac{dE}{E} dp\, \phi_1^* \delta(\sqrt{p^2+m^2} - E)\phi_2$$

spĺňa uvedené podmienky. Skalárny súčin je daný

$$\langle \eta\phi_1, \eta\phi_2 \rangle = \int \frac{dp}{E_p} (\phi_2^*\phi_1)\Big|_{E=E_p}$$

a fyzikálny Hilbertov priestor je $\mathcal{H}_{phys} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3; dp/E_p)$, kde $E_p = \sqrt{p^2+m^2}$.
Priraďme Diracovským veličinám ich kvantové analógy. Pre hybnosti a energiu nie je žiaden problém zistiť, že $\hat{p}_{phys} = p$, $\hat{E} = E_p$, ale čo s x_0? Vieme, že s $\hat{t}$, je potiaž. Skusmo zistíme, že

$$\hat{t} = -i\partial_E + i\frac{1}{2E^2}$$

je symetrický operátor. Výpočtom indexov defektu, zistíme, že $\hat{t}$ nemá symetrické rozšírenie. To ale nevadí. Nás zaujíma predsa akcia x_0 na $\mathcal{H}_{phys}$, to je to, čo je z fyzikálneho hľadiska podstatné. Tak skúsme zistiť ako vyzerá $x_{0\,phys}$ a zistíme, že

$$x_{0\,phys} = i\partial_p - i\frac{1}{2E^2},$$

a že toto je v podstate samozdružený operátor na definičnom obore $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Čo nás veľmi potešilo, pretože sa nám náš program podarilo úspešne aplikovať.

5 Záver

Referencie

[1] gyutim*Quantization of Constraints System*

[2] Ashtekhar,...*vecicky kolo toho*

[3] wald,...*na krivom pozadi*

[4] Thiemann T.*The LQG – String: Loop Quantum Gravity Quantization of String Theory I. Flat Target Space*, gr-qc/0401172

[5] napríklad: Thiemann T.gr-qc/0210094,gr-qc/0110034

99