Časový vývoj v parametrizovaných systémoch prvého druhu

Marián Pilc

Ústav teoretické fyziky
Matematicko-fyzikální fakulta UK
V Holešovičkách 2, Praha

Príklady parametrizovaných systémov:

-Všeobecná teória relativity

-Relativistická častica

-Struna

-...

Problém časového vývoja v kvantovej teórii

$$\hat{H}|\text{fyz.stavy}>=0$$

Kde sa schováva evolúcia, ktorú pozorujeme vôkol?

Začnime od začiatku.

Parametrizované systémy prvého druhu

Nech (Γ, ω) je symplektická varieta a akcia má tvar ($\dim\Gamma = N < \infty$, pre jednoduchosť):

$$S = \int \mathrm{d}\tau (\mathrm{p_i \dot{q}^i - N^\alpha C_\alpha}),$$

kde

$$\{C_\alpha, C_\beta\} = F^{\gamma}_{\alpha\,\beta} C_\gamma.$$

Väzbová plocha

Označme:

$$\hat{\Gamma} := \{\mathrm{a} \in \Gamma : C_\alpha(\mathrm{a}) = 0\}$$

a

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{a}} &:= \mathrm{Span}_\alpha\{\mathrm{dC}_\alpha|_{\mathrm{a}}\} \subset \mathrm{T}^*_{\mathrm{a}}\Gamma, \\ \nu(\mathrm{a}) &:= \mathrm{dim} N_{\mathrm{a}}. \end{aligned}$$

Problém: $\nu(\mathrm{a})$ nemusí byť konštanta.

Ak je oblasť nekonštantnosti "malá" , tak zoberme za väzbovú plochu

$$\tilde{\Gamma} := \hat{\Gamma} \setminus \text{"oblasť nekonštantnosti"}$$

ak nie je, tak sa $\hat{\Gamma}$ rozdelí na viac oblastí, predpokladajme, že máme iba jednu takú oblasť $\tilde{\Gamma}$ a $\nu = \nu(\mathrm{a})$.

Orbity, Fyzikálny fázový priestor

Označme:

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{a}} := \{V \in \mathrm{T_a}\Gamma; \mathrm{i_V}\omega \in \mathrm{N_a}\}$$

Platí

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{a}} \subset \mathrm{T_a}\tilde{\Gamma} \Leftrightarrow \{\mathrm{C}_\alpha, \mathrm{C}_\beta\} = \mathrm{F}^{\gamma}_{\alpha\,\beta}\mathrm{C}_\gamma.$$

Vďaka

$$[\zeta_A, \zeta_B] = -\zeta_{\{A,B\}}$$

vidno, že $\mathfrak{X}_{\mathrm{a}}$ je integrovateľná distribúcia.

Maximálnu integrálnu varietu prechádzajúcou bodom a nazvyme *orbitou* γ_{a}.

Priestor

$$\Gamma_{fyz.} := \tilde{\Gamma}|_{\gamma}$$

nazveme *fyzikálnym fázovým priestorom.*

Klasické trajektórie

Pohybové rovnice dostaneme variáciou akcie

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{a}} &= N^{\alpha}\zeta_{C_\alpha}, \\ C_\alpha &= 0, \end{aligned}$$

kde N^α sú ľubovoľné funkcie na Γ.

Vidno, že trajektórie sa nachádzaju vo vnútri orbity γ_{a}, teda na fyzikálnom fázovom priestore Γ_{fyz} a sú tvorené iba jedným bodom γ_{a}.

Tento jav sa nazýva *zmrznutie dynamiky.*

Pozorovateľné-"Trvalky"

Pozorovateľná A v zmysle Diraca, sa nazýva taká funkcia, ktorá spĺňa:

$$\{A, C_\alpha\}\big|_{\tilde{\Gamma}} = 0.$$

Keďže je hamiltonián úmerný väzbám, tak

$$\dot{A} = 0$$

pozdĺž trajektórie. Pozorovateľné sú teda integrály pohybu! K.Kuchař takéto veličiny nazval *Trvalky*.

Existuje aj iný prístup k pozorovateľným založený na Rovelliho myšlienke čiastočných a úplných pozorovateľných. Úplné sú v tomto prípade trvalky a čiastočné napríklad poloha relativistickej časte atď.

Kvantová mechanika

Existujú dve rôzne cesty:

I.

-funkciám na Γ sa priradí $\star$-algebra
-nájde sa jej $\star$-reprezentácia na $\mathcal{H}_{AUX}$
-riešia sa väzby

$$\hat{C}_\alpha |fyz.\rangle = 0$$

a tak sa zostrojí $\mathcal{H}_{fyz}$.

II.

-väzby sa riešia klasicky, nájdu sa všetky Diracove pozorovateľné
-Diracovým pozorovateľným sa priradí $\star$-algebra
-nájde sa jej $\star$-reprezentácia priamo na $\mathcal{H}_{fyz.}$.

Oba postupy majú svoje výhody aj nevýhody

Spoločný rys pre náš prípad:
-teória je kalibračne invariantná
-pozorovateľné sú integrály pohybu-trvalky
-Hamiltonián je nulový t.j.

$$\hat{H} = 0 \quad \text{na} \quad \mathcal{H}_{fyz}$$

-stavy sú teda konštantné v čase
$\Rightarrow$ žiadna informácia o časovom vývoji

PROBLÉM!!!

Toto sa nepozoruje!!!

Priečna plocha

Nech $\Gamma_t \subset \tilde{\Gamma}$ je $2(N-\nu)$-rozmerná podvarieta spĺňajúca:

(1) nech $\mathrm{a} \in \tilde{\Gamma}$ a γ_{a} orbita v bode a, tak

$$\mathrm{T_a \Gamma_t} \oplus \mathrm{T_a} \gamma_{\mathrm{a}} = \mathrm{T_a}\tilde{\Gamma}$$

(2)nech γ je ľubovoľná orbita, potom γ pretne Γ_t najviac raz

Γ_t sa nazýva *Priečna plocha.*

Definujme projekciu $\pi_t : \tilde{\Gamma} \to \Gamma_t$

$$\pi_t \mathrm{a} = \Gamma_t \cap \gamma_{\mathrm{a}}$$

$\mathrm{D}(\Gamma_t)$ označuje definičný obor projekcie π_t, keďže môže byť netriviálny, má zmysel toto špeciálne označenie. Ak $\mathrm{D}(\Gamma_t) = \tilde{\Gamma}$, tak sa Γ_t nazýva *Globálnou priečnou plochou.* V ďalšom uvažujeme len takéto priečne plochy.
Ďalej nech $\omega_t = i_t^* \omega$, kde $i_t : \Gamma_t \to \tilde{\Gamma}$, potom (Γ_t, ω_t) je simplektická varieta a $\{\cdot, \cdot\}_t$ je Poissonova zátvorka prislúchajúca k ω_t.

Hamiltonián pre danú priečnu plochu

Zvoľme globálnu priečnu plochu Γ_0. Nech h je trvalka a Φ_ε jej tok, ktorý má tú vlastnosť, že

$$\Gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon \Gamma_0$$

je zase globálna priečna plocha. Podpriestory Γ_ε budeme volať *časové plochy.*

Keďže orbity pretínajú Γ_0 práve raz, tak môžme vybrať z trvaliek, také veličiny, ktoré budú "číslovať" body Γ_0. Označme $A_\varepsilon = A \circ \Phi_{-\varepsilon}$. Ak $\mathrm{a} \in \Gamma_\varepsilon$ a platí $\mathrm{a} = \Phi_\varepsilon(\mathrm{b})$ pre $\mathrm{b} \in \Gamma_0$, tak platí

$$A_\varepsilon(\mathrm{a}) = A_0(\mathrm{b}).$$

Označme

$$\eta_\gamma(\varepsilon) = \Gamma_\varepsilon \cap \gamma,$$

potom časový vývoj trvalky A voči Γ_0 a h v stave γ definujeme ako

$$A(\varepsilon, \gamma) = A_\varepsilon\left(\eta_\gamma(\varepsilon)\right) = A_\varepsilon\left(\eta_\gamma(0)\right).$$

Nech $H = -h|_{\Gamma_0}$, potom

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{A}}_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon} = \{\tilde{A}_\varepsilon, H\}_0,$$

kde

$$\tilde{A}_\varepsilon = A_\varepsilon|_{\Gamma_0}.$$

H nazveme *hamiltonián*.

Keďže H je trvalka, tak ma dobrý zmysel aj $\hat{H}$ na $\mathcal{H}_{fyz}$. Teda

$$\hat{U}_\varepsilon = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\hat{H}}$$

je evolučný operátor na kvantovej úrovni.

Príklad: Relativistická častica

Akcia pre relativistickú časticu

$$S = \int \mathrm{dw} \left\{ \mathbf{p}\dot{\mathbf{x}} - \mathrm{E}\dot{\mathrm{t}} - \mathrm{N}(\sqrt{\mathbf{p}^2 + \mathrm{m}^2} - \mathrm{E}) \right\}$$

Fázový priestor

$$\Gamma = \mathrm{T}^*\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{R}^8,$$

väzbová plocha

$$\tilde{\Gamma} \ = \ \left\{ [\mathbf{x}, t, \mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}] \right\}$$

$$\mathrm{T}\tilde{\Gamma} \ = \ \mathrm{Span} \left\{ \partial_{\mathbf{x}}; \partial_t; \partial_{\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \partial_E \right\}$$

a orbity

$$\gamma_{[\mathbf{x}, t, \mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}]} =$$

$$= \left\{ [\mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \lambda, t + \lambda, \mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}], \forall \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Priečna plocha

$$\Gamma_0 = \left\{ [\mathbf{x}, 0, \mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}] \right\}$$

spĺňa $D(\Gamma_0) = \tilde{\Gamma}$, takže Γ_0 je globálna.

Trvalky

$$A = A\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}t}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} = \mathbf{x}_o, \mathbf{p}\right)$$

Skúmajme trvalku $h = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

$$\zeta_h = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}\partial_{\mathbf{x}}$$

$$\Phi_\varepsilon\left([\mathbf{x}, 0, \mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}]\right) =$$
$$= [\mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}\varepsilon, 0, \mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}]$$

Časový vývoj veličín je

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_o(\varepsilon) &= \mathbf{x}_o + \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}\varepsilon \\ \mathbf{p}(\varepsilon) &= \mathbf{p} \end{aligned}$$

Kvantová mechanika

Zvolíme postup II. Trvalky spĺňajú

$$\{\mathbf{x}_o, \mathbf{p}\} = \mathbb{I}.$$

Trvalkám priradíme operátory na $\mathcal{H}_{fyz} = \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3, \mathrm{d}^3\mathbf{p})$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} \\ \hat{\mathbf{x}}_o &= \mathrm{i}\partial_{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

Unitárny operátor časového vývoja je

$$\hat{U}(\varepsilon)\psi(\mathbf{p}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}\psi(\mathbf{p})$$

Referencie

[1] P.Hájíček: *Group quantization of parametrized systems I.:Time levels*, J.Math.Phys.**36**(9)

[2] P.Hájíček: *Time evolution and observables in constrained systems*, Class.Quantum Grav. **13**(1996)1353-1375

[3] A.Ashtekar, M.Stillerman: *Geometric quantization and constrained systems*, J.Math.Phys.**27**(5)

[4] P.Hájíček, C.J.Isham: *The symplectic geometry of a parametrized scalar field on a curved backround*, J.Math.Phys**37**(7),
P.Hájíček, C.J.Isham: *Perennials and the group-theoretical quantization of a parametrized scalar field on a curved backround*, J.Math.Phys**37**(7)

[5] C.Rovelli: *Quantum Mechanics without time: A model*, Phys.Rev.D **42**, 2638(1990)
C.Rovelli: *Time in quantum gravity: An hypothesis* Phys.Rev.D **43**, 442(1991)
P.Hájíček: *Comment on"Time in quantum gravity: An hypothesis"*, Phys.Rev.D **44**, 1337(1991)
C.Rovelli *Quantum evolving constant. Reply to "Comment on 'Time in quantum gravity: An hypothesis'"*, Phys.Rev.D **44**, 1339(1991)
C.Rovelli *Partial observables*, Phys.Rev.D **65**,124013(2002)