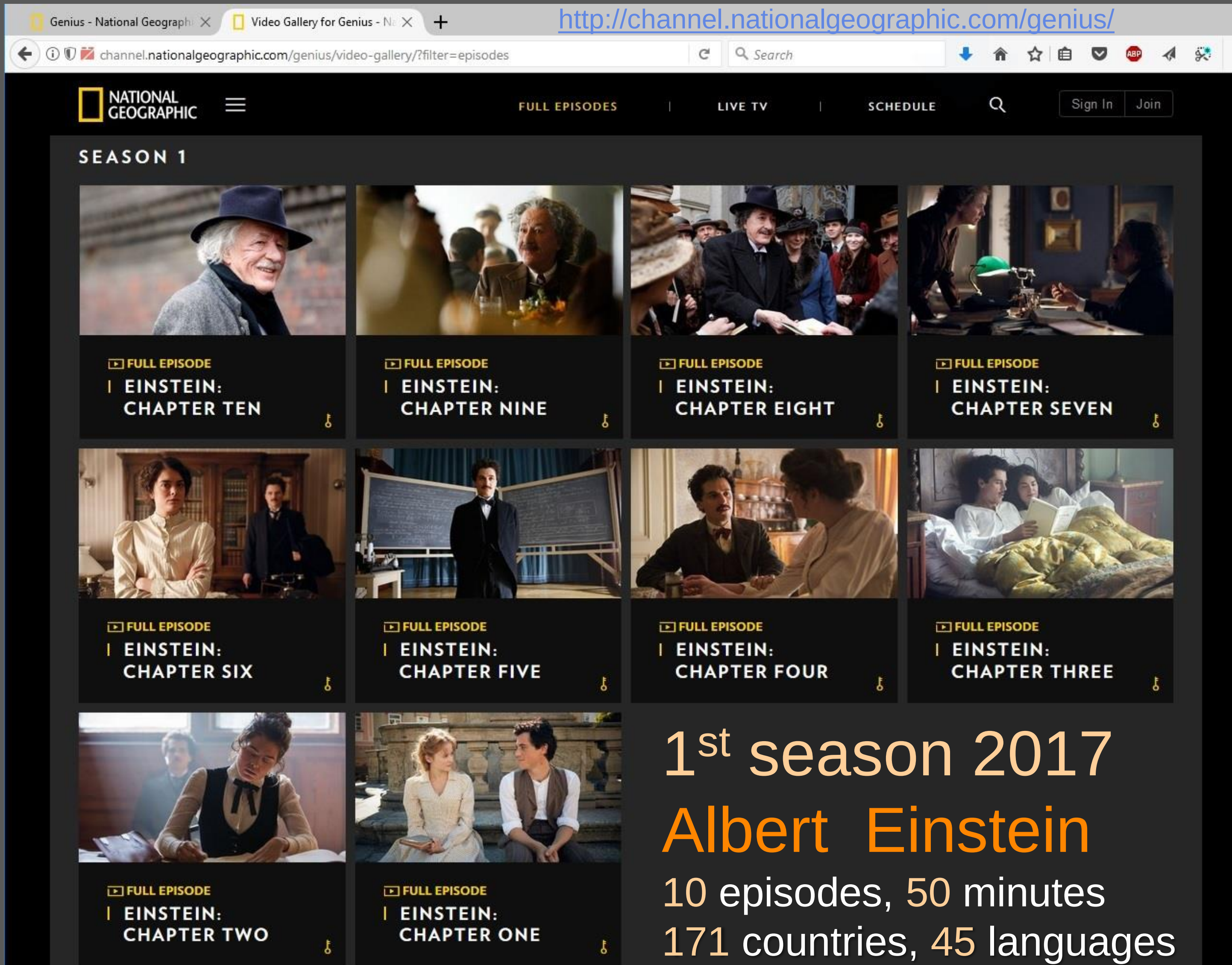
Einstein again in Prague in 2017: Filming the TV series Genius.

Prof. Jiří Podolský
Institute of Theoretical Physics
Faculty of Mathematics and Physics
Charles University, Prague, 2018

Genius.TV series National Geographic

http://channel.nationalgeographic.com/genius/



1st season 2017

Albert Einstein

10 episodes, 50 minutes

171 countries, 45 languages

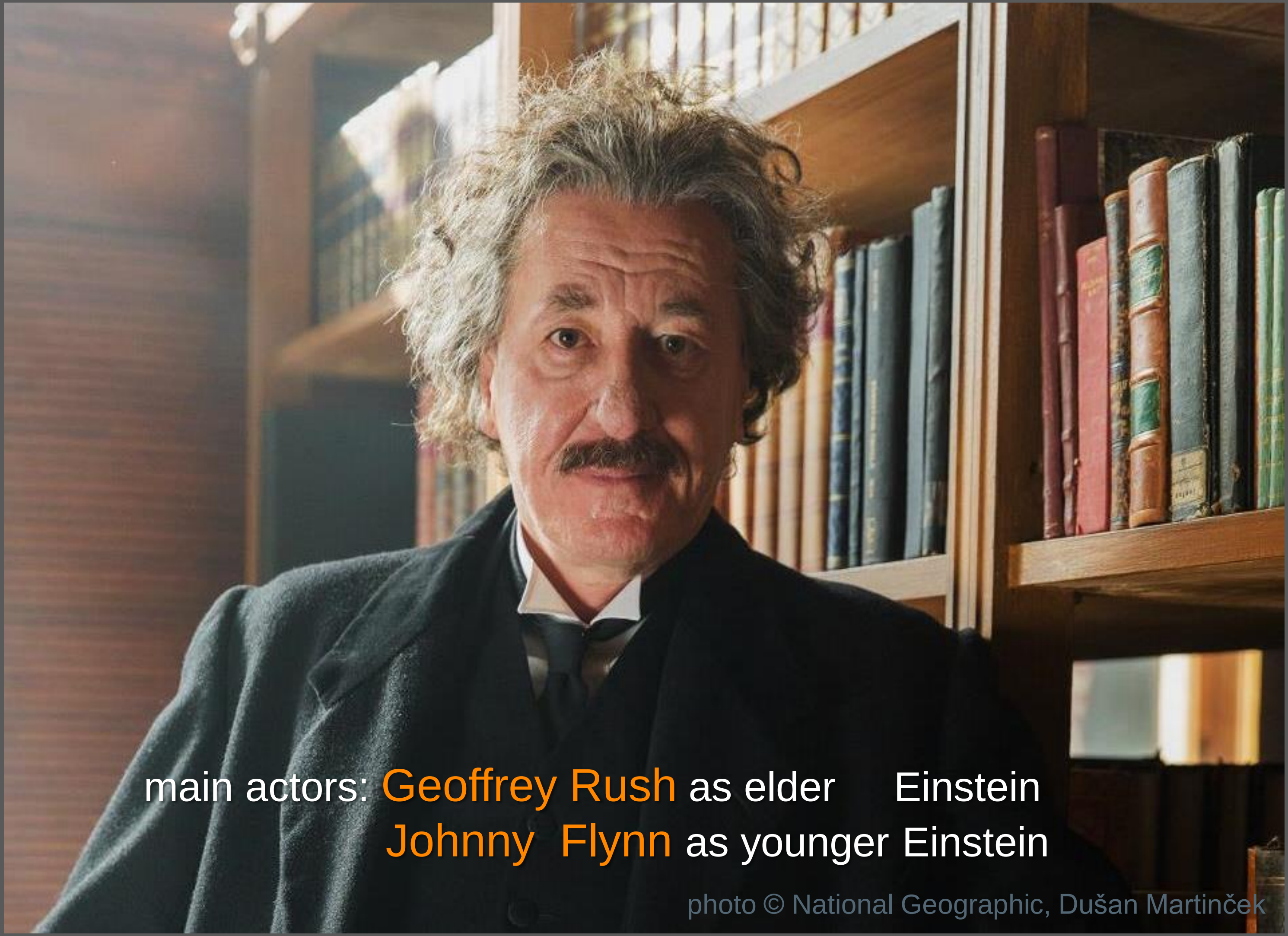
Genius.

NATIONAL GEOGRAPHIC

producers Brian Grazer, Ron Howard and others
based on the book by Walther Isaacson
script Kenneth Biller, Noah Pink and others

Genius.

NATIONAL GEOGRAPHIC



Genius.

NATIONAL GEOGRAPHIC

photo © National Geographic, Dušan Martinček

Genius.

NATIONAL GEOGRAPHIC

filmed only in/around Prague, 9/2016 – 2/2017
staff 250 – 400 people, 95 % were Czechs

photo © National Geographic, Dušan Martinček

Genius.

NATIONAL GEOGRAPHIC

Einstein in Salzburg
September 1909

photo © National Geographic, Dušan Martinček

Genius.

NATIONAL GEOGRAPHIC

though experiment: in a freely falling lift there is no gravitation (locally)

Einstein in Prague 1. 4. 1911 – 25. 7. 1912

Einstein's appointment to professor of theoretical physics

proposal to the Monarch by the Minister of Cultus and Education Graf Stürgkh,
and the decision by Franz Joseph I

I thus arrive most obediently to my most humble appeal:

Would
Your Highness
deign

to most graciously appoint the associate professor of theoretical physics at the University in Zürich, Dr. Albert Einstein, as a regular professor of theoretical physics at the German University in Prague with a systematized salary, with legal effect as of April 1, 1911.

Stürgkh

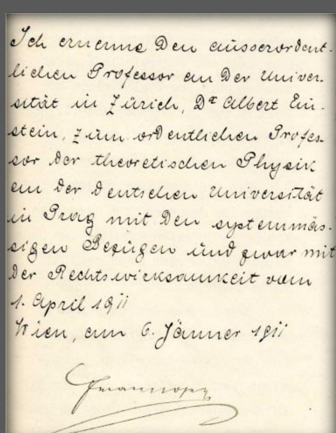
Vienna, December 16, 1910

I appoint the associate professor at the University in Zürich, Dr. Albert Einstein, as a regular professor of theoretical physics at the German University in Prague with a systematized salary, with legal effect as of April 1, 1911.

Vienna, January 6, 1911

Franz Joseph

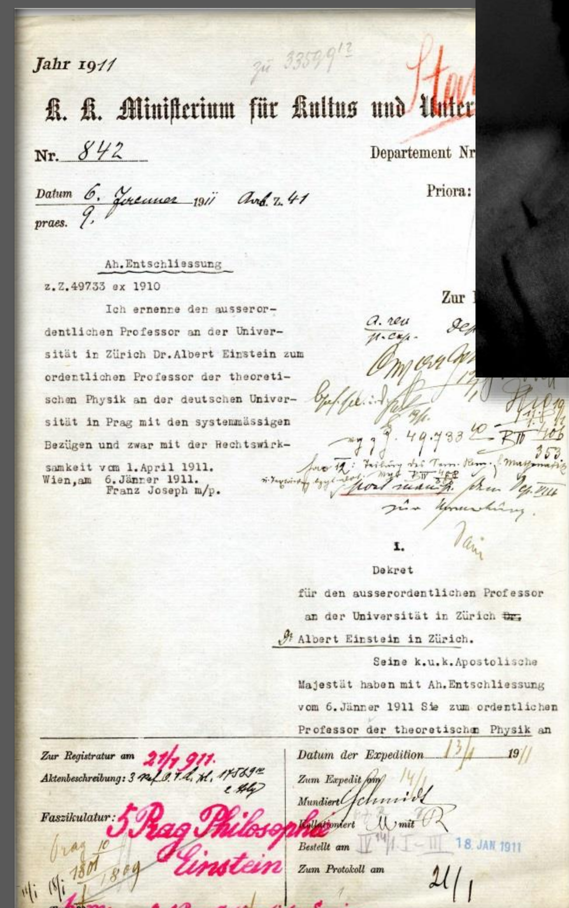
Received on January 6, 1911 Stürgkh



Ich ernenne den ausserordentlichen Professor an der Universität in Zürich, Dr Albert Einstein, zum ordentlichen Professor der theoretischen Physik an der deutschen Universität in Prag mit den systemmässigen Bezügen und zwar mit der Rechtswirksamkeit vom 1. April 1911

Wien, am 6. Jänner 1911

Franz Joseph's personal consent on 6. 1. 1911



Jahr 1911

K. K. Ministerium für Kultus und Unter…

Nr. 842

Departement Nr

Datum 6. Jänner 1911

praes. 9.

Priora:

Ah. Entschliessung

z.Z.49733 ex 1910

Ich ernenne den ausserordentlichen Professor an der Universität in Zürich Dr. Albert Einstein zum ordentlichen Professor der theoretischen Physik an der deutschen Universität in Prag mit den systemmässigen Bezügen und zwar mit der Rechtswirksamkeit vom 1. April 1911.

Wien, am 6. Jänner 1911.

Franz Joseph m/p.

I.

Dekret

für den ausserordentlichen Professor an der Universität in Zürich Dr. Albert Einstein in Zürich.

Seine k.u.k. Apostolische Majestät haben mit Ah. Entschliessung vom 6. Jänner 1911 Sie zum ordentlichen Professor der theoretischen Physik an

Zur Registratur am 21/1 911

Aktenbeschreibung:

Faszikulatur: 5 Prag Philosophie Einstein

Datum der Expedition 13/1 1911

Zum Expedit am 14/1

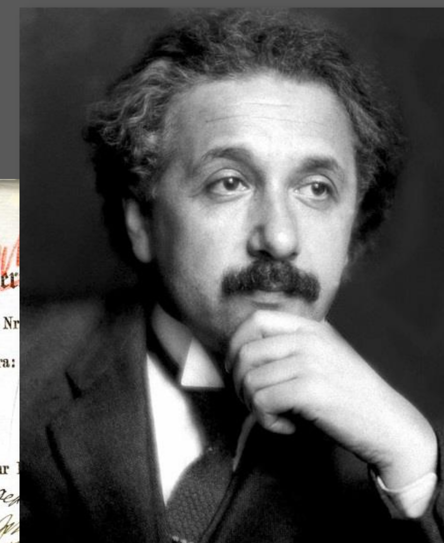
Mundiert

Kollationiert

Bestellt am

18. JAN 1911

Zum Protokoll am 21/1



letter of appointment decreeing Einstein a regular professor in Prague

Genius.

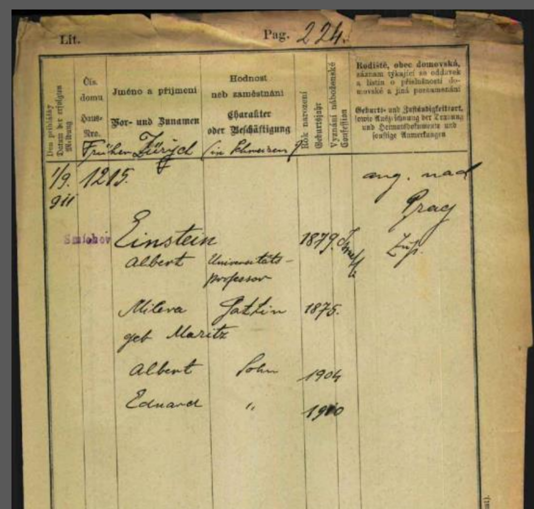
NATIONAL GEOGRAPHIC

their fictitious meeting

Einstein’s residence in Prague 1911-1912

Einstein with his wife Mileva and sons Hans Albert and Eduard lived in Třebízského Street (now Lesnická 7) in *Art Nouveau* style house built in 1910 in Smíchov district

© Jiří Podolsky



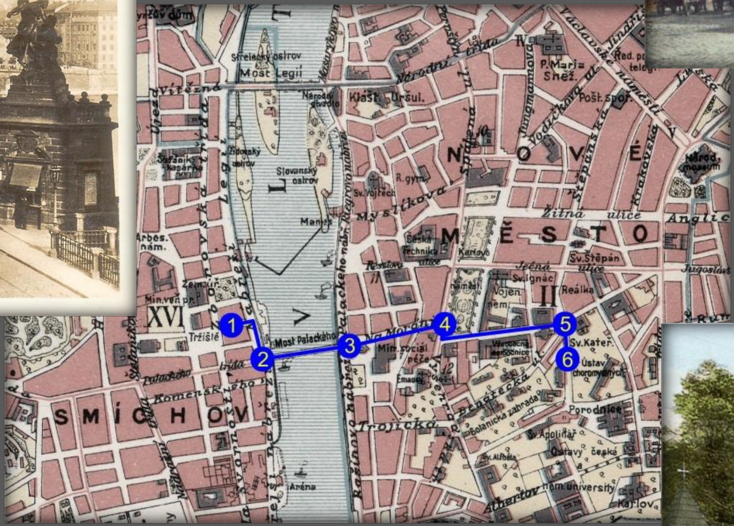
the entry of permanent residency of the Einstein family in the Prague police registry

after leaving the house, he would turn right along the Vltava River soon reaching the Palacký Bridge:

Einstein’s walk to the Institute

2

Palacký bridge built in 1878 had two tollhouses decorated with statues by the sculptor J. V. Myslbek



3

after crossing the bridge he would walk to the Karlovo Square, would pass the baroque Faust House and continue up past the hospitals

4

5

close to the gothic St. Catherine’s Church Einstein would turn into the Viničná Street and would come to the Natural Sciences building of the University

6

the street, on its eastern side, is flanked by the wall of the oldest insane asylum

Albert Einstein to Philipp Frank:

„Those are the madmen who do not occupy themselves with the quantum theory!“

Genius.

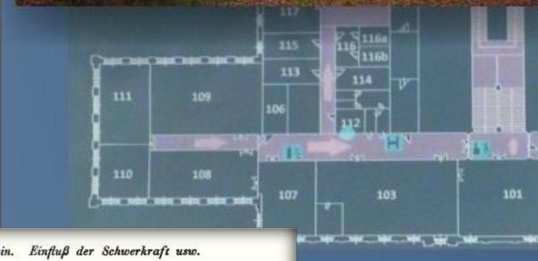
Einstein and Mileva at the Charles Bridge

Genius.

NATIONAL GEOGRAPHIC

Albert Einstein and Michele Besso
in a discussion at the Charles Bridge
about a deflection of light

Einstein's Prague work on gravity



he started to systematically build his general relativity

in his first Prague article from June 1911:
„On the influence of gravity on propagation of light“
he derived gravitational redshift and deflection of light rays

4. *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes;* *von A. Einstein.*

Die Frage, ob die Ausbreitung des Lichtes durch die Schwere beinflußt wird, habe ich schon an einer vor 3 Jahren erschienenen Abhandlung zu beantworten gesucht.[1]) Ich komme auf dies Thema wieder zurück, weil mich meine damalige Darstellung des Gegenstandes nicht befriedigt, noch mehr aber, weil ich nun nachträglich einsehe, daß eine der wichtigsten Konsequenzen jener Betrachtung der experimentellen Prüfung zugänglich ist. Es ergibt sich nämlich, daß Lichtstrahlen, die in der Nähe der Sonne vorbeigehen, durch das Gravitationsfeld derselben nach der vorzubringenden Theorie eine Ablenkung erfahren, so daß eine scheinbare Vergrößerung des Winkelabstandes eines nahe an der Sonne erscheinenden Fixsternes von dieser im Betrage von fast einer Bogensekunde eintritt.

Es haben sich bei der Durchführung der Überlegungen auch noch weitere Resultate ergeben, die sich auf die Gravi-
[2] tation beziehen. Da aber die Darlegung der ganzen Betrachtung ziemlich unübersichtlich würde, sollen im folgenden nur einige ganz elementare Überlegungen gegeben werden, aus denen man sich bequem über die Voraussetzungen und den Gedankengang der Theorie orientieren kann. Die hier abgeleiteten Beziehungen sind, auch wenn die theoretische Grundlage zutrifft, nur in erster Näherung gültig.

[3] **§ 1. Hypothese über die physikalische Natur des Gravitationsfeldes.**

In einem homogenen Schwerefeld (Schwerebeschleunigung γ) befinde sich ein ruhendes Koordinatensystem K, das so orientiert sei, daß die Kraftlinien des Schwerefeldes in Richtung

[1] 1) A. Einstein, Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik IV. 4.

nicht beide die „Zeit“ richtig an. Messen wir die Zeit in S_1 mit der Uhr U, *so müssen wir die Zeit in S_2 mit einer Uhr messen, die $1 + \Phi/c^2$ mal langsamer läuft als die Uhr U, falls sie mit der Uhr U an derselben Stelle verglichen wird.* Denn mit einer solchen Uhr gemessen ist die Frequenz des oben betrachteten Lichtstrahles bei seiner Aussendung in S_2

$$\nu_2\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right),$$

also nach (2a) gleich der Frequenz ν_1 desselben Lichtstrahles
[10] bei dessen Ankunft in S_1.

Hieraus ergibt sich eine Konsequenz von für diese Theorie fundamentaler Bedeutung. Mißt man nämlich in dem beschleunigten, gravitationsfeldfreien System K' an verschiedenen Orten die Lichtgeschwindigkeit unter Benutzung gleich beschaffener Uhren U, so erhält man überall dieselbe Größe. Dasselbe gilt nach unserer Grundannahme auch für das System K. Nach dem soeben Gesagten müssen wir aber an Stellen verschiedenen Gravitationspotentials uns verschieden beschaffener Uhren zur Zeitmessung bedienen. Wir müssen zur Zeitmessung an einem Orte, der relativ zum Koordinatenursprung das Gravitationspotential Φ besitzt, eine Uhr verwenden, die — an den Koordinatenursprung versetzt — $(1 + \Phi/c^2)$ mal langsamer läuft als jene Uhr, mit welcher am Koordinatenursprung die Zeit gemessen wird. Nennen wir c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Koordinatenanfangspunkt, so wird daher die Lichtgeschwindigkeit c in einem Orte vom Gravitationspotential Φ durch die Beziehung

$$c = c_0\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) \tag{3}$$

gegeben sein. Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gilt nach dieser Theorie nicht in derjenigen Fassung, wie es der gewöhnlichen Relativitätstheorie zugrunde gelegt zu werden pflegt.

§ 4. Krümmung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld.

Aus dem soeben bewiesenen Satze, daß die Lichtgeschwindigkeit im Schwerefelde eine Funktion des Ortes ist, läßt sich leicht mittels des Huygensschen Prinzipes schließen, daß quer

Nach Gleichung (4) erleidet ein an einem Himmelskörper vorbeigehender Lichtstrahl eine Ablenkung nach der Seite sinkenden Gravitationspotentials, also nach der dem Himmelskörper zugewandten Seite von der Größe

$$\alpha = \frac{1}{c^2}\int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=+\frac{\pi}{2}} \frac{k\,M}{r^2}\cos\vartheta\cdot ds = \frac{2\,k\,M}{c^2\,\Delta},$$

wobei k die Gravitationskonstante, M die Masse des Himmelskörpers, Δ den Abstand des Lichtstrahles vom Mittelpunkt des Himmelskörpers bedeutet. *Ein an der Sonne vorbeigehender Lichtstrahl erlitte demnach eine Ablenkung vom Betrage $4\cdot 10^{-6}$*
[11] *$= 0{,}83$ Bogensekunden.* Um diesen Betrag erscheint die Winkeldistanz des Sternes vom Sonnenmittelpunkt durch die Krümmung des Strahles vergrößert. Da die Fixsterne der der Sonne zugewandten Himmelspartien bei totalen Sonnenfinsternissen sichtbar werden, ist diese Konsequenz der Theorie mit der Erfahrung ver-
[12] gleichbar. Beim Planeten Jupiter erreicht die zu erwartende Verschiebung etwa $^1/_{100}$ des angegebenen Betrages. Es wäre dringend zu wünschen, daß sich Astronomen der hier aufgerollten Frage annähmen, auch wenn die im vorigen gegebenen Überlegungen ungenügend fundiert oder gar abenteuerlich erscheinen sollten. Denn abgesehen von jeder Theorie muß man sich fragen, ob mit den heutigen Mitteln ein Einfluß der Gravitationsfelder auf die Ausbreitung des Lichtes sich konstatieren läßt.

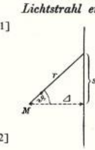
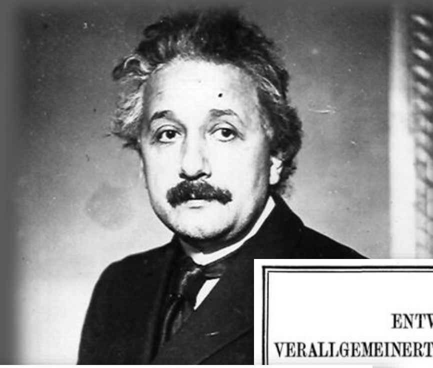


Fig. 3.

Prag, Juni 1911.

(Eingegangen 21. Juni 1911.)

but it was only a first step on a long journey to a complete theory of general relativity…



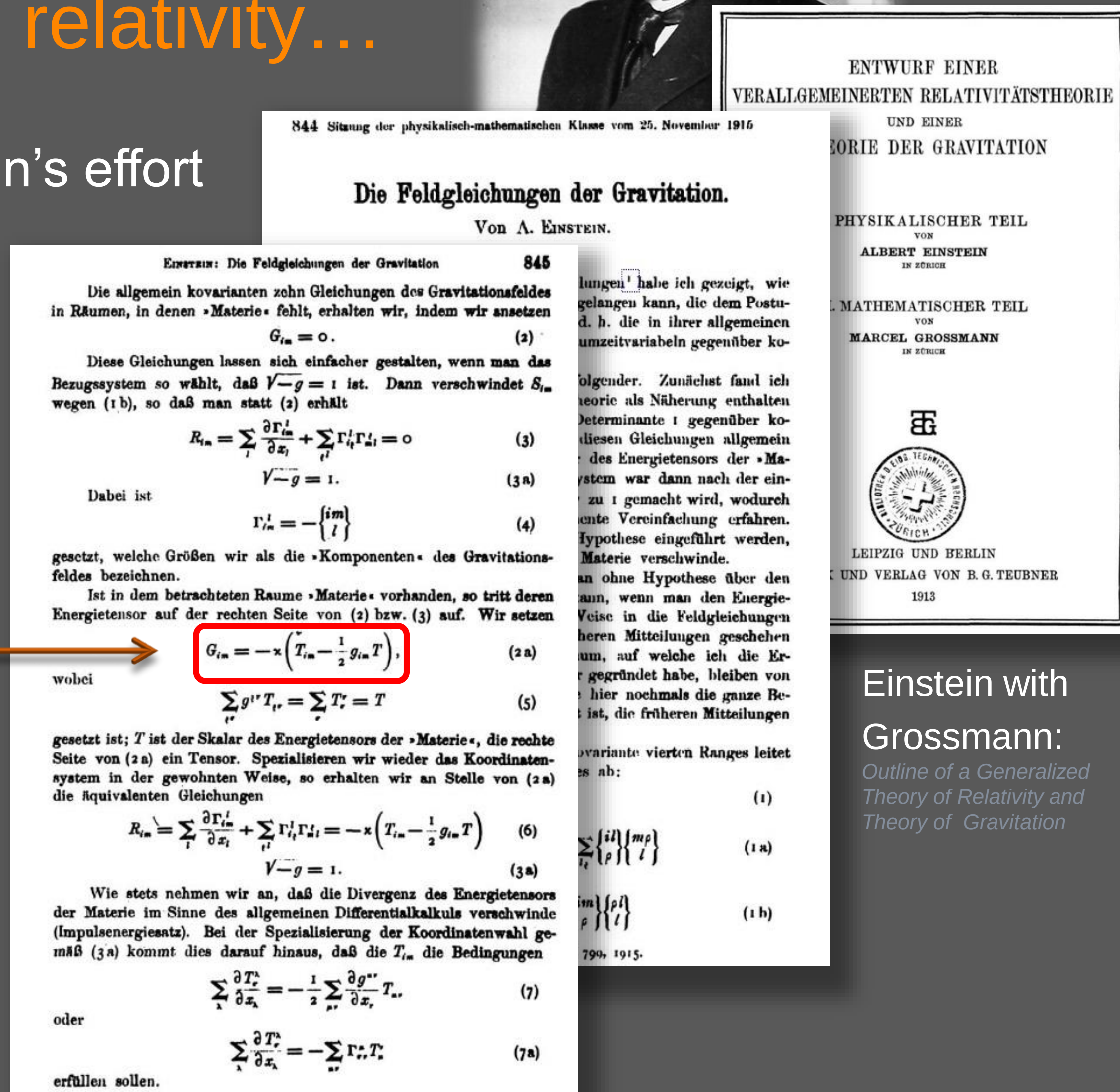
1915

almost 5 years of Einstein's effort

- 1912-1914 Zürich
  mathematical description of a curved space-time using differential geometry: metric and general tensors

- 1914-1915 Berlin
  searching for the correct form of the equations of gravitational field

Equations of Gravitational Field : presented 25. 11. 1915



ENTWURF EINER VERALLGEMEINERTEN RELATIVITÄTSTHEORIE UND EINER [THE]ORIE DER GRAVITATION

PHYSIKALISCHER TEIL VON ALBERT EINSTEIN IN ZÜRICH

MATHEMATISCHER TEIL VON MARCEL GROSSMANN IN ZÜRICH

LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

844 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 25. November 1915

Die Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

Einstein: Die Feldgleichungen der Gravitation 845

Die allgemein kovarianten zehn Gleichungen des Gravitationsfeldes in Räumen, in denen »Materie« fehlt, erhalten wir, indem wir ansetzen

$$G_{im} = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichungen lassen sich einfacher gestalten, wenn man das Bezugssystem so wählt, daß $\sqrt{-g} = 1$ ist. Dann verschwindet S_{im} wegen (1b), so daß man statt (2) erhält

$$R_{im} = \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{im}}{\partial x_l} + \sum_{\rho l} \Gamma^\rho_{il} \Gamma^l_{m\rho} = 0 \qquad (3)$$

$$\sqrt{-g} = 1. \qquad (3a)$$

Dabei ist

$$\Gamma^l_{im} = -\begin{Bmatrix} im \\ l \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

gesetzt, welche Größen wir als die »Komponenten« des Gravitationsfeldes bezeichnen.

Ist in dem betrachteten Raume »Materie« vorhanden, so tritt deren Energietensor auf der rechten Seite von (2) bzw. (3) auf. Wir setzen

$$\boxed{G_{im} = -\varkappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right),} \qquad (2a)$$

wobei

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} = \sum_\sigma T^\sigma_\sigma = T \qquad (5)$$

gesetzt ist; T ist der Skalar des Energietensors der »Materie«, die rechte Seite von (2a) ein Tensor. Spezialisieren wir wieder das Koordinatensystem in der gewohnten Weise, so erhalten wir an Stelle von (2a) die äquivalenten Gleichungen

$$R_{im} = \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{im}}{\partial x_l} + \sum_{\rho l} \Gamma^\rho_{il} \Gamma^l_{m\rho} = -\varkappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right) \qquad (6)$$

$$\sqrt{-g} = 1. \qquad (3a)$$

Wie stets nehmen wir an, daß die Divergenz des Energietensors der Materie im Sinne des allgemeinen Differentialkalkuls verschwinde (Impulsenergiesatz). Bei der Spezialisierung der Koordinatenwahl gemäß (3a) kommt dies darauf hinaus, daß die T_{im} die Bedingungen

$$\sum_\lambda \frac{\partial T^\lambda_\sigma}{\partial x_\lambda} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_{\mu\nu} \qquad (7)$$

oder

$$\sum_\lambda \frac{\partial T^\lambda_\sigma}{\partial x_\lambda} = -\sum_{\mu\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} T^\nu_\mu \qquad (7a)$$

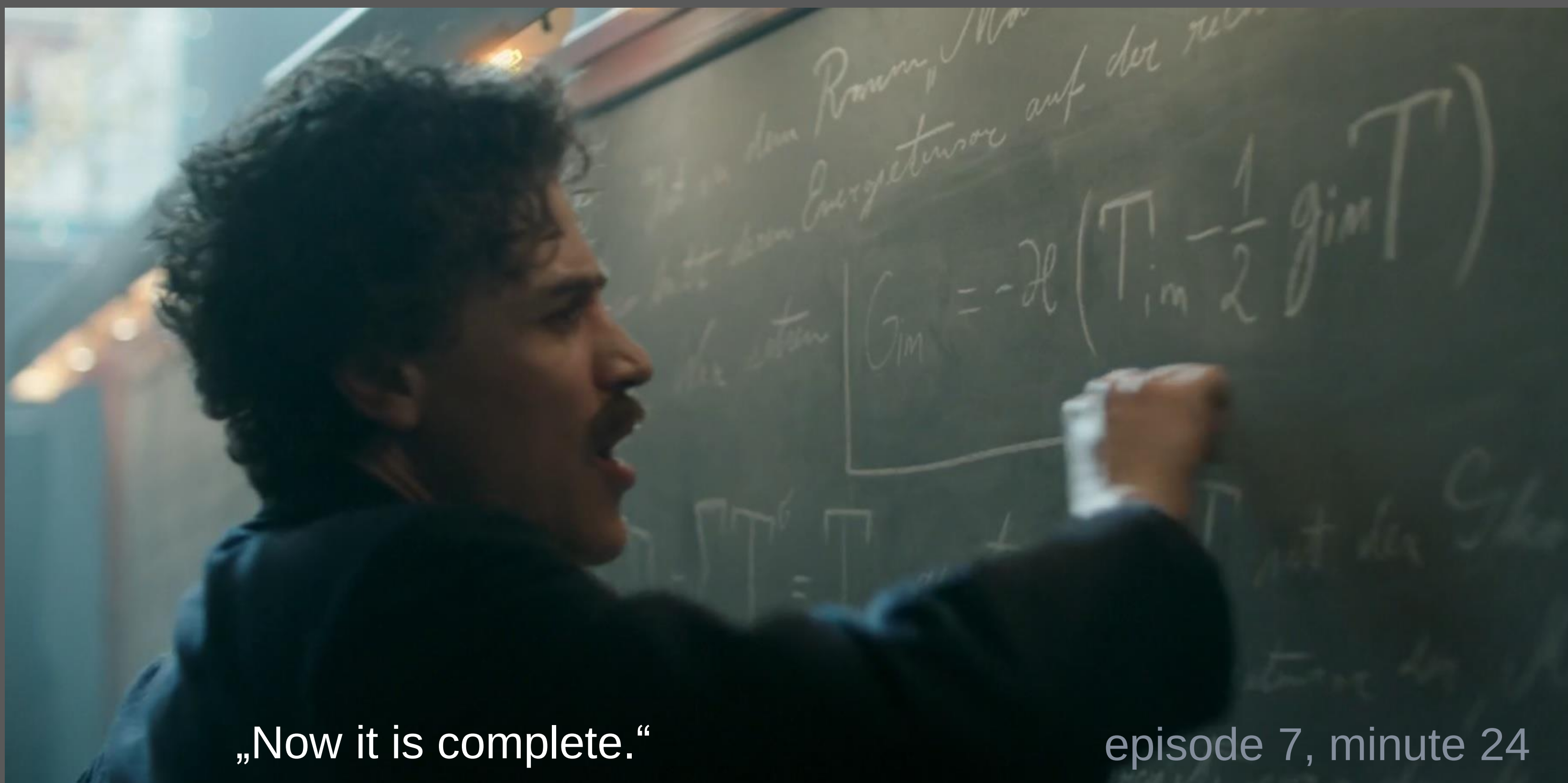
erfüllen sollen.

Einstein with Grossmann:
Outline of a Generalized Theory of Relativity and Theory of Gravitation

Genius.

NATIONAL GEOGRAPHIC

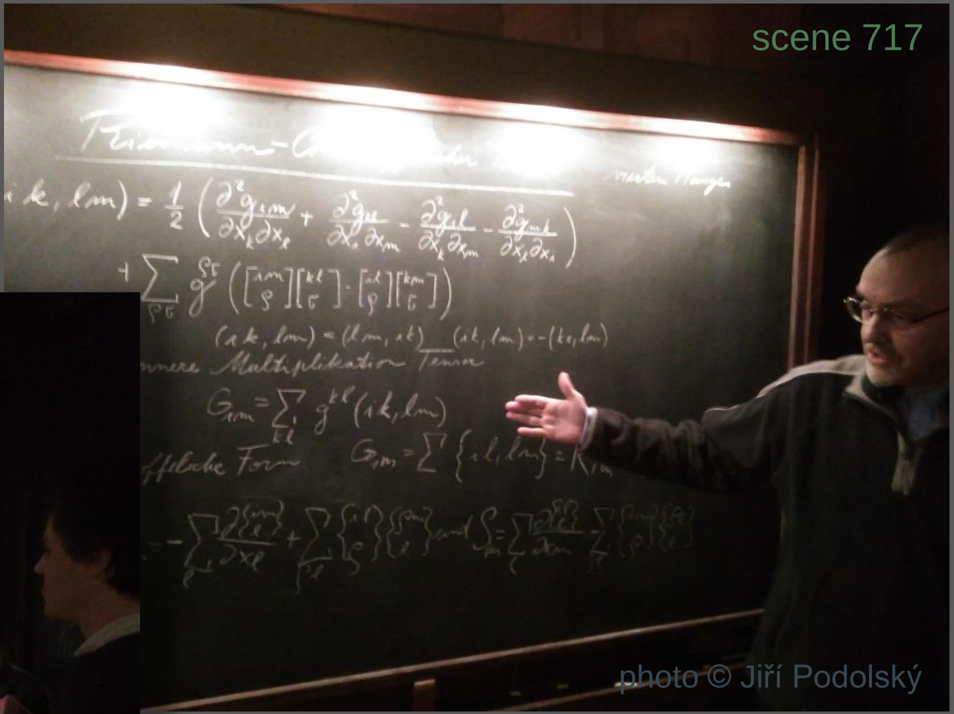
Einstein writes his final equations of gravitational field

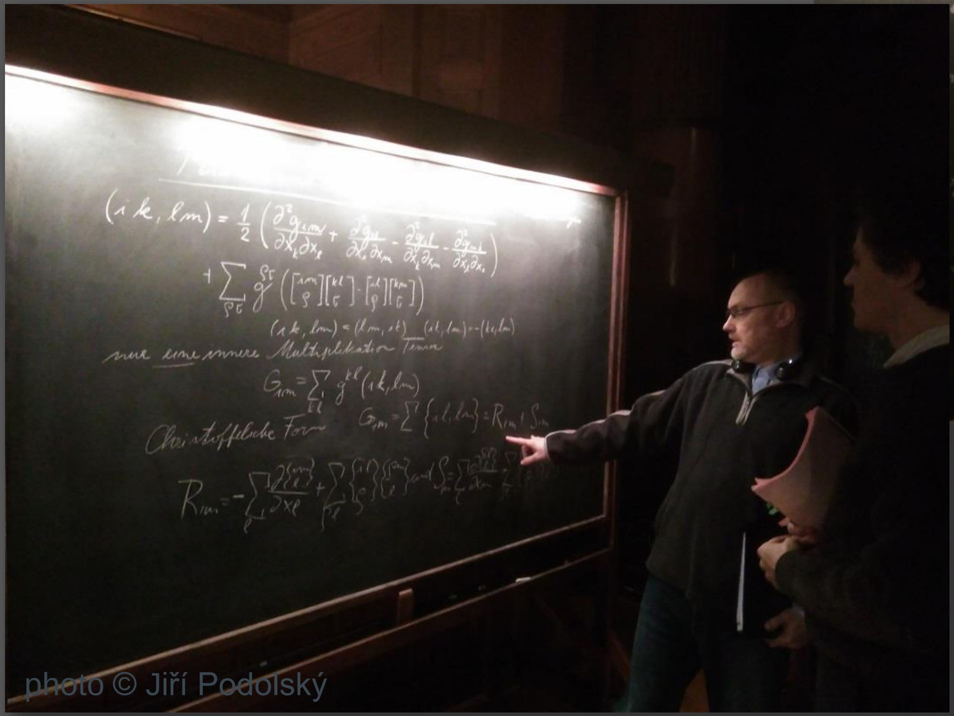


„Now it is complete.“

episode 7, minute 24

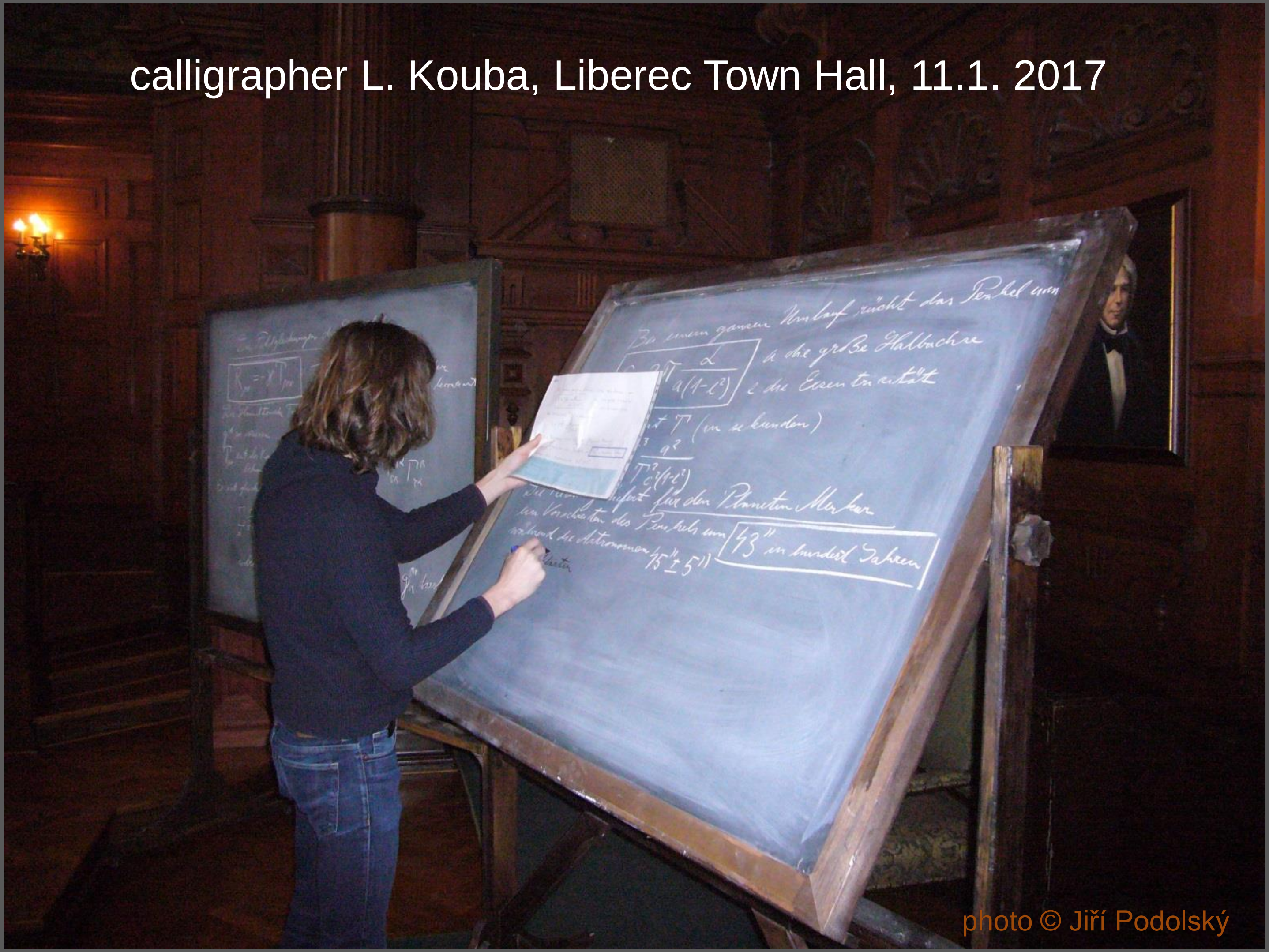
behind the scenes: preparing the blackboards





here I am giving advice
to Albert Einstein, namely
what is the Ricci tensor G_{im}
(nowadays denoted as $R_{\mu\nu}$)

writing the blackboards according to my templates



calligrapher L. Kouba, Liberec Town Hall, 11.1. 2017

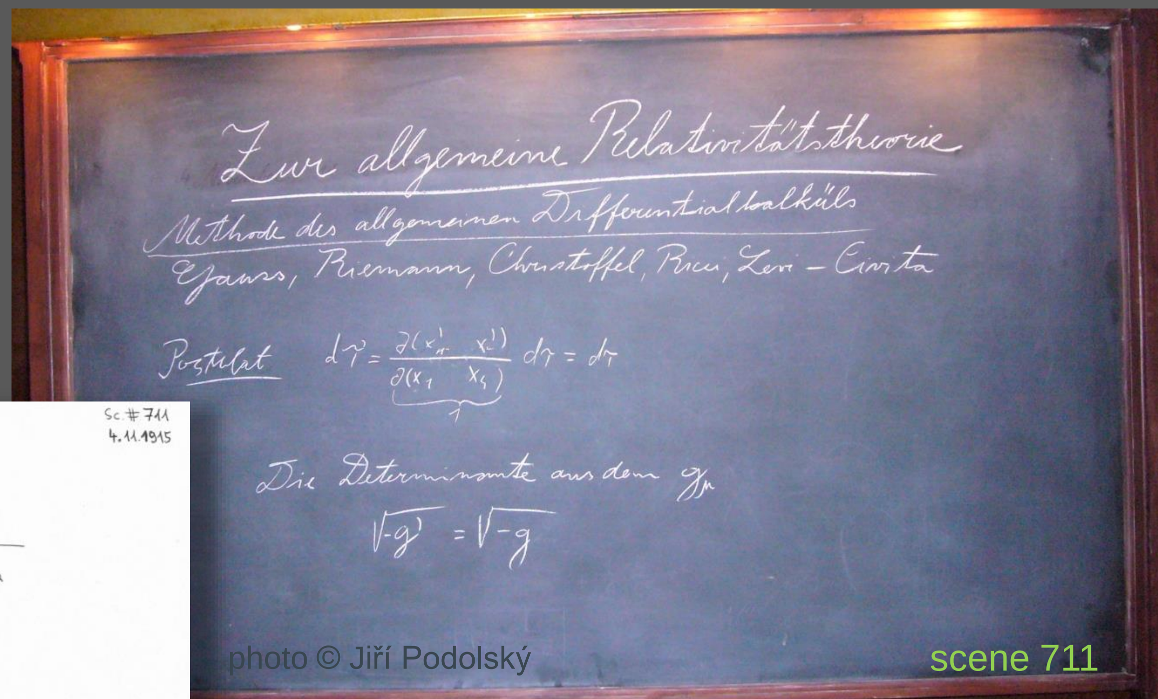
photo © Jiří Podolský

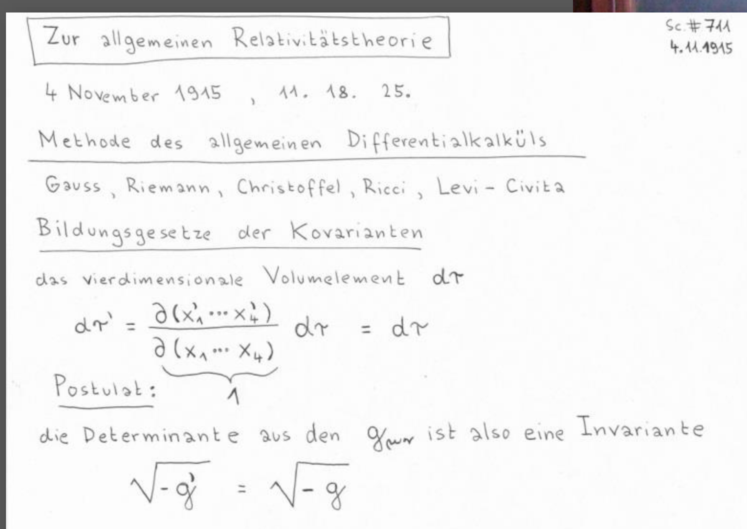
Einstein finishes GR, Berlin, November 1915

4 plenary sessions of the
Prussian Academy of Sciences in Berlin

filmed in Liberec 11.1. 2017
7^{th} episode of the series

4.11. scenes 711,717,719
11.11. no scene
18.11. scenes 722,725
25.11. scenes 732





my template of the first blackboard

4.11.1915

original source:

scenes 711, 717, 719

Zur allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. Einstein.

In den letzten Jahren war ich bemüht, auf die Voraussetzung der Relativität auch nicht gleichförmiger Bewegungen eine allgemeine Relativitätstheorie zu gründen. Ich glaubte in der Tat, das einzige Gravitationsgesetz gefunden zu haben, das dem sinngemäß gefaßten, allgemeinen Relativitätspostulate entspricht, und suchte die Notwendigkeit gerade dieser Lösung in einer im vorigen Jahre in diesen Sitzungsberichten erschienenen Arbeit[1] darzutun.

Eine erneute Kritik zeigte mir, daß sich jene Notwendigkeit auf dem dort eingeschlagenen Wege absolut nicht erweisen läßt; daß dies doch der Fall zu sein schien, beruhte auf Irrtum. Das Postulat der Relativität, soweit ich es dort gefordert habe, ist stets erfüllt, wenn man das Hamiltonsche Prinzip zugrunde legt; es liefert aber in Wahrheit keine Handhabe für eine Ermittelung der Hamiltonschen Funktion H des Gravitationsfeldes. In der Tat drückt die die Wahl von H einschränkende Gleichung (77) a. a. O. nichts anderes aus, als daß H eine Invariante bezüglich linearer Transformationen sein soll, welche Forderung mit der der Relativität der Beschleunigung nichts zu schaffen hat. Ferner wird die durch Gleichung (78) a. a. O. getroffene Wahl durch Gleichung (77) keineswegs festgelegt.

Aus diesen Gründen verlor ich das Vertrauen zu den von mir aufgestellten Feldgleichungen vollständig und suchte nach einem Wege, der die Möglichkeiten in einer natürlichen Weise einschränkte. So gelangte ich zu der Forderung einer allgemeineren Kovarianz der Feldgleichungen zurück, von der ich vor drei Jahren, als ich zusammen mit meinem Freunde Grossmann arbeitete, nur mit schwerem Herzen abgegangen war. In der Tat waren wir damals der im nachfolgenden gegebenen Lösung des Problems bereits ganz nahe gekommen.

Wie die spezielle Relativitätstheorie auf das Postulat gegründet ist, daß ihre Gleichungen bezüglich linearer, orthogonaler Transfor-

[1] Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsberichte XLI, 1914, S. 1066—1077. Im folgenden werden Gleichungen dieser Abhandlungen beim Zitieren durch den Zusatz »a. a. O.« von solchen der vorliegenden Arbeit unterschieden.

mationen kovariant sein sollen, so ruht die hier darzulegende Theorie auf dem Postulat der Kovarianz aller Gleichungssysteme bezüglich Transformationen von der Substitutionsdeterminante 1.

Dem Zauber dieser Theorie wird sich kaum jemand entziehen können, der sie wirklich erfaßt hat; sie bedeutet einen wahren Triumph der durch Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci und Levi-Civiter begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls.

§ 1. Bildungsgesetze der Kovarianten.

Da ich in meiner Arbeit vom letzten Jahre eine ausführliche Darlegung der Methoden des absoluten Differentialkalküls gegeben habe, kann ich mich hier bei der Darlegung der hier zu benutzenden Bildungsgesetze der Kovarianten kurz fassen; wir brauchen nur zu untersuchen, was sich an der Kovariantentheorie dadurch verändert, daß nur Substitutionen von der Determinante 1 zugelassen werden.

Die für beliebige Substitutionen gültige Gleichung

$$d\tau' = \frac{\partial(x_1' \cdots x_4')}{\partial(x_1 \cdots x_4)} d\tau$$

geht zufolge der Prämisse unsrer Theorie

$$\frac{\partial(x_1' \cdots x_4')}{\partial(x_1 \cdots x_4)} = 1 \tag{1}$$

über in

$$d\tau' = d\tau; \tag{2}$$

das vierdimensionale Volumelement $d\tau$ ist also eine Invariante. Da ferner (Gleichung (17) a. a. O.) $\sqrt{-g}\,d\tau$ eine Invariante bezüglich beliebiger Substitutionen ist, so ist für die uns interessierende Gruppe auch

$$\sqrt{-g'} = \sqrt{-g} \tag{3}$$

Die Determinante aus den $g_{\mu\nu}$ ist also eine Invariante. Vermöge des Skalarcharakters von $\sqrt{-g}$ lassen die Grundformeln der Kovariantenbildung gegenüber den bei allgemeiner Kovarianz gültigen eine Vereinfachung zu, die kurz gesagt darin beruht, daß in den Grundformeln die Faktoren $\sqrt{-g}$ und $\frac{1}{\sqrt{-g}}$ nicht mehr auftreten, und der Unterschied zwischen Tensoren und V-Tensoren wegfällt. Im einzelnen ergibt sich folgendes:

4.11.1915

original source:

scenes 711, 717, 719

Ein Vergleich mit (41b) zeigt, daß bei unserer Festsetzung das Gesetz für die Divergenz dasselbe ist, wie gemäß dem allgemeinen Differentialkalkül das Gesetz für die Divergenz des V-Tensors. Daß diese Bemerkung für beliebige Tensordivergenzen gilt, läßt sich aus (5) und (5a) leicht ableiten.

3. Die tiefgreifendste Vereinfachung bringt unsere Beschränkung auf Transformationen von der Determinante 1 hervor für diejenigen Kovarianten, die aus den $g_{\mu\nu}$ und ihren Ableitungen allein gebildet werden können. Die Mathematik lehrt, daß diese Kovarianten alle von dem Riemann-Christoffelschen Tensor vierten Ranges abgeleitet werden können, welcher (in seiner kovarianten Form) lautet:

$$\left.\begin{aligned}(ik,lm) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_l \partial x_i}\right)\\ + \sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma}\left(\begin{bmatrix} im \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kl \\ \sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} il \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} km \\ \sigma \end{bmatrix}\right)\end{aligned}\right\}. \quad (10)$$

Das Problem der Gravitation bringt es mit sich, daß wir uns besonders für die Tensoren zweiten Ranges interessieren, welche aus diesem Tensor vierten Ranges und den $g_{\mu\nu}$ durch innere Multiplikation gebildet werden können. Infolge der aus (10) ersichtlichen Symmetrie-Eigenschaften des Riemannschen Tensors

$$\left.\begin{aligned}(ik,lm) &= (lm,ik)\\ (ik,lm) &= -(ki,lm)\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

kann eine solche Bildung nur auf *eine* Weise vorgenommen werden; es ergibt sich der Tensor

$$G_{im} = \sum_{kl} g^{kl}(ik,lm). \quad (12)$$

Wir leiten diesen Tensor für unsere Zwecke jedoch vorteilhafter aus einer zweiten, von Christoffel angegebenen Form des Tensors (10) ab, nämlich aus[1]

$$\{ik,lm\} = \sum_\rho g^{k\rho}(i\rho,lm) = \frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} im \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_\rho \left[\begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho m \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho l \\ k \end{Bmatrix}\right]. \quad (13)$$

Aus diesem ergibt sich der Tensor G_{im}, indem man ihn mit dem Tensor

$$\delta_k^l = \sum_\alpha g_{k\alpha} g^{\alpha l}$$

multipliziert (innere Multiplikation):

[1] Einen einfachen Beweis für den Tensorcharakter dieses Ausdrucks findet man auf S. 1053 meiner mehrfach zitierten Arbeit.

$$G_{im} = \{il,lm\} = R_{im} + S_{im} \quad (13)$$

$$R_{im} = -\frac{\partial \begin{Bmatrix} im \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_\rho \begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho m \\ l \end{Bmatrix} \quad (13a)$$

$$S_{im} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho l \\ l \end{Bmatrix}. \quad (13b)$$

Beschränkt man sich auf Transformationen von der Determinante 1, so ist nicht nur (G_{im}) ein Tensor, sondern es besitzen auch (R_{im}) und (S_{im}) Tensorcharakter. In der Tat folgt aus dem Umstande, daß $\sqrt{-g}$ ein Skalar ist, wegen (6), daß $\begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}$ ein kovarianter Vierervektor ist. (S_{im}) ist aber gemäß (29) a. a. O. nichts anderes als die Erweiterung dieses Vierervektors, also auch ein Tensor. Aus dem Tensorcharakter von (G_{im}) und (S_{im}) folgt nach (13) auch der Tensorcharakter von (R_{im}). Dieser letztere Tensor ist für die Theorie der Gravitation von größter Bedeutung.

§ 2. Bemerkungen zu den Differentialgesetzen der »materiellen« Vorgänge.

1. Impuls-Energie-Satz für die Materie (einschließlich der elektromagnetischen Vorgänge im Vakuum.

An die Stelle der Gleichung (42a) a. a. O. hat nach den allgemeinen Betrachtungen des vorigen Paragraphen die Gleichung

$$\sum_\sigma \frac{\partial T_\nu^\sigma}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\tau} g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} T_\tau^\sigma + K_\nu \quad (14)$$

zu treten; dabei ist T_ν^σ ein gewöhnlicher Tensor, K_ν ein gewöhnlicher kovarianter Vierervektor (kein V-Tensor bzw. V-Vektor). An diese Gleichung haben wir eine für das Folgende wichtige Bemerkung zu knüpfen. Diese Erhaltungsgleichung hat mich früher dazu verleitet, die Größen

$$\frac{1}{2}\sum_\mu g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

als den natürlichen Ausdruck für die Komponenten des Gravitationsfeldes anzusehen, obwohl es im Hinblick auf die Formeln des absoluten Differentialkalküls näher liegt, die Christoffelschen Symbole

$$\begin{Bmatrix} \nu\sigma \\ \tau \end{Bmatrix}$$

statt jener Größen einzuführen. Dies war ein verhängnisvolles Vorurteil. Eine Bevorzugung des Christoffelschen Symbols rechtfertigt

4.11.1915

original source:

scenes 711, 717, 719

sich insbesondere wegen der Symmetrie bezüglich seiner beiden Indices kovarianten Charakters (hier ν und σ) und deswegen, weil dasselbe in den fundamental wichtigen Gleichungen der geodätischen Linie (23b) a. a. O. auftritt, welche, vom physikalischen Gesichtspunkte aus betrachtet, die Bewegungsgleichung des materiellen Punktes in einem Gravitationsfelde sind. Gleichung (14) bildet ebenfalls kein Gegenargument, denn das erste Glied ihrer rechten Seite kann in die Form

$$\sum_{\sigma\tau}\left\{\begin{matrix}\sigma\nu\\ \tau\end{matrix}\right\}T^\nu_\tau$$

gebracht werden.

Wir bezeichnen daher im folgenden als Komponenten des Gravitationsfeldes die Größen

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = -\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \sigma\end{matrix}\right\} = -\sum_\alpha g^{\sigma\alpha}\left|\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}\right| = -\frac{1}{2}\sum_\alpha g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right). \qquad (15)$$

Bezeichnet T^ν_σ den Energietensor des gesamten »materiellen« Geschehens, so verschwindet K_σ; der Erhaltungssatz (14) nimmt dann die Form an

$$\sum_\alpha \frac{\partial T^\alpha_\sigma}{\partial x_\alpha} = -\sum_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}T^\beta_\alpha. \qquad (14a)$$

Wir merken an, daß die Bewegungsgleichungen (23b) a. a. O. des materiellen Punktes im Schwerefelde die Form annehmen

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = \sum_{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}. \qquad (15)$$

2. An den Betrachtungen der Paragraphen 10 und 11 der zitierten Abhandlung ändert sich nichts, nur haben nun die dort als V-Skalare und V-Tensoren bezeichneten Gebilde den Charakter gewöhnlicher Skalare bzw. Tensoren.

§ 3. Die Feldgleichungen der Gravitation.

Nach dem bisher Gesagten liegt es nahe, die Feldgleichungen der Gravitation in der Form

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu} \qquad (16)$$

anzusetzen, da wir bereits wissen, daß diese Gleichungen gegenüber beliebigen Transformationen von der Determinante 1 kovariant sind. In der Tat genügen diese Gleichungen allen Bedingungen, die wir an sie zu stellen haben. Ausführlicher geschrieben lauten sie gemäß (13a) und (15)

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = -\varkappa T_{\mu\nu}. \qquad (16a)$$

Wir wollen nun zeigen, daß diese Feldgleichungen in die Hamiltonsche Form

$$\left.\begin{aligned}\delta\left\{\int\left(\mathfrak{L}-\varkappa\sum_{\mu\nu}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\right)d\tau\right\}\\ \mathfrak{L}=\sum_{\sigma\tau\alpha\beta}g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\alpha}\end{aligned}\right| \qquad (17)$$

gebracht werden können, wobei die $g^{\mu\nu}$ zu variieren, die $T_{\mu\nu}$ als Konstante zu behandeln sind. Es ist nämlich (17) gleichbedeutend mit den Gleichungen

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\varkappa T_{\mu\nu}, \qquad (18)$$

wobei $\mathfrak{L}$ als Funktion der $g^{\mu\nu}$ und $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ $(= g^{\mu\nu}_\sigma)$ zu denken ist. Anderseits ergeben sich durch eine längere, aber ohne Schwierigkeiten durchzuführende Rechnung die Beziehungen

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\sum_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} \qquad (19)$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}. \qquad (19a)$$

Diese ergeben zusammen mit (18) die Feldgleichungen (16a).

Nun läßt sich auch leicht zeigen, daß dem Prinzip von der Erhaltung der Energie und des Impulses Genüge geleistet wird. Multipliziert man (18) mit $g^{\mu\nu}_\sigma$ und summiert man über die Indices μ und ν, so erhält man nach geläufiger Umformung

$$\sum_{\alpha\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_\sigma\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x_\sigma} = -\varkappa\sum_{\mu\nu}T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_\sigma.$$

Anderseits ist nach (14) für den gesamten Energietensor der Materie

$$\sum_\lambda \frac{\partial T^\lambda_\sigma}{\partial x_\lambda} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

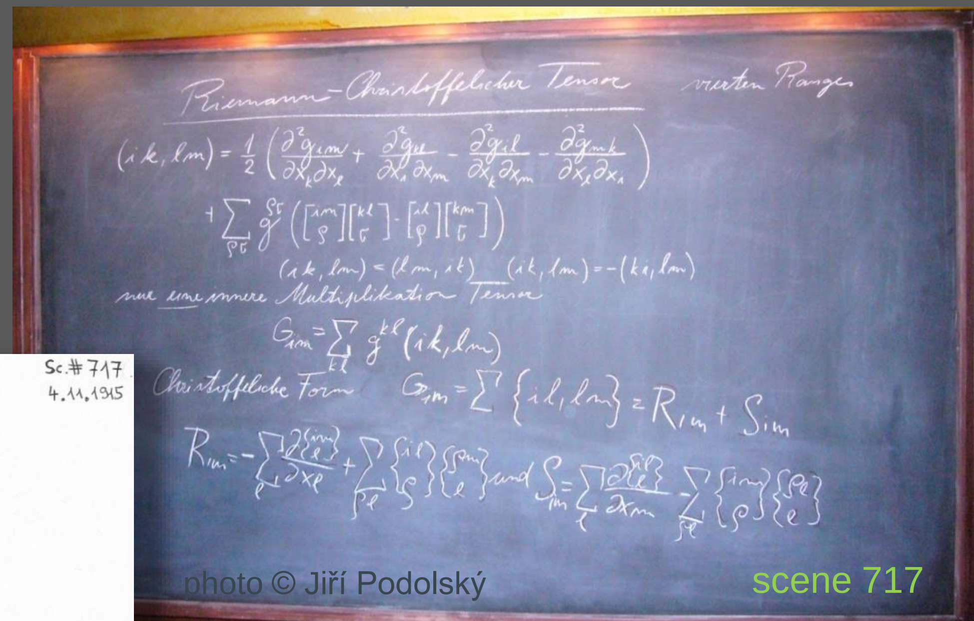
$$\sum_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda}(T^\lambda_\sigma + t^\lambda_\sigma) = 0, \qquad (20)$$

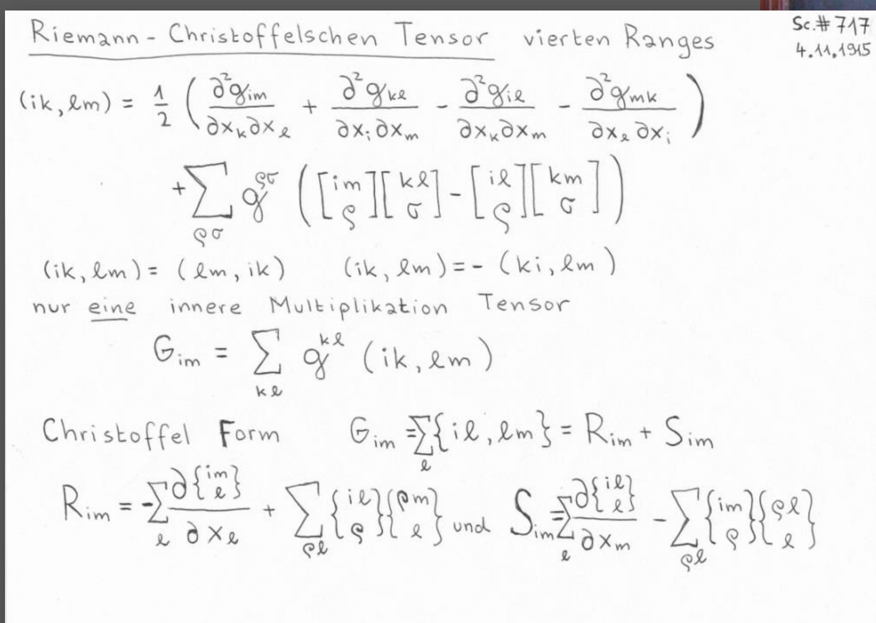
wobei

$$t^\lambda_\sigma = \frac{1}{2\varkappa}\left(\mathfrak{L}\delta^\lambda_\sigma - \sum_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_\sigma\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_\lambda}\right) \qquad (20a)$$

4.11.1915

mathematical formalism





Sc. # 717
4.11.1915

Riemann - Christoffelschen Tensor vierten Ranges

$$(ik,\ell m) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_\ell} + \frac{\partial^2 g_{k\ell}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{i\ell}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_\ell \partial x_i}\right)$$

$$+\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma}\left(\begin{bmatrix} im \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\ell \\ \sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i\ell \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} km \\ \sigma \end{bmatrix}\right)$$

$(ik,\ell m) = (\ell m, ik) \qquad (ik,\ell m) = -(ki,\ell m)$

nur eine innere Multiplikation Tensor

$$G_{im} = \sum_{k\ell} g^{k\ell}(ik,\ell m)$$

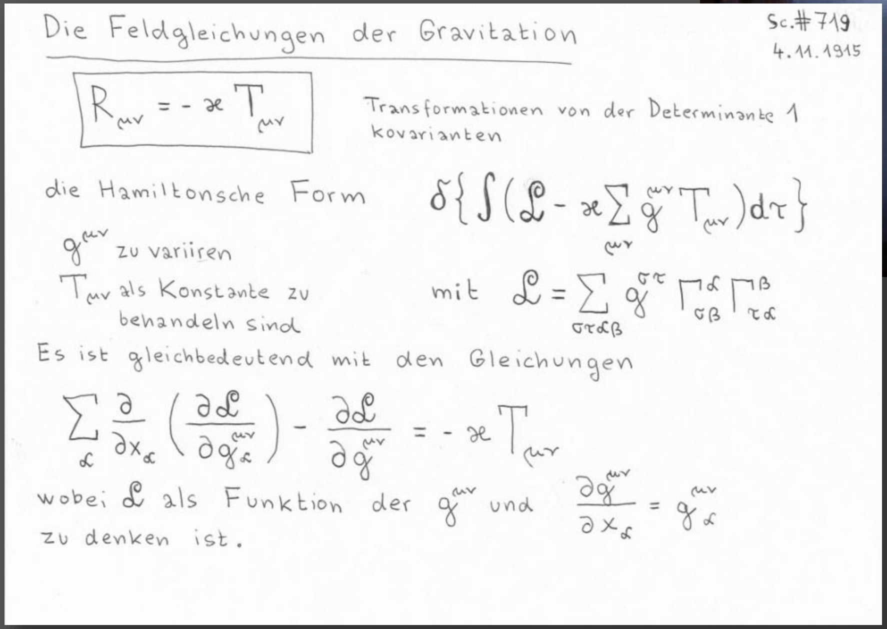
Christoffel Form $\quad G_{im} = \sum_{\ell}\{i\ell,\ell m\} = R_{im} + S_{im}$

$$R_{im} = -\sum_{\ell}\frac{\partial\begin{Bmatrix} im \\ \ell \end{Bmatrix}}{\partial x_\ell} + \sum_{\rho\ell}\begin{Bmatrix} i\ell \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho m \\ \ell \end{Bmatrix} \text{ und } S_{im} = \sum_{\ell}\frac{\partial\begin{Bmatrix} i\ell \\ \ell \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \sum_{\rho\ell}\begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho\ell \\ \ell \end{Bmatrix}$$

my template and the blackboard

4.11.1915

first form of the field equations



Die Feldgleichungen der Gravitation

Sc.#719
4.11.1915

$$\boxed{R_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}}$$

Transformationen von der Determinante 1 kovarianten

die Hamiltonsche Form $\delta\left\{\int\left(\mathfrak{L} - \varkappa\sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}\right)d\tau\right\}$

$g^{\mu\nu}$ zu variiren

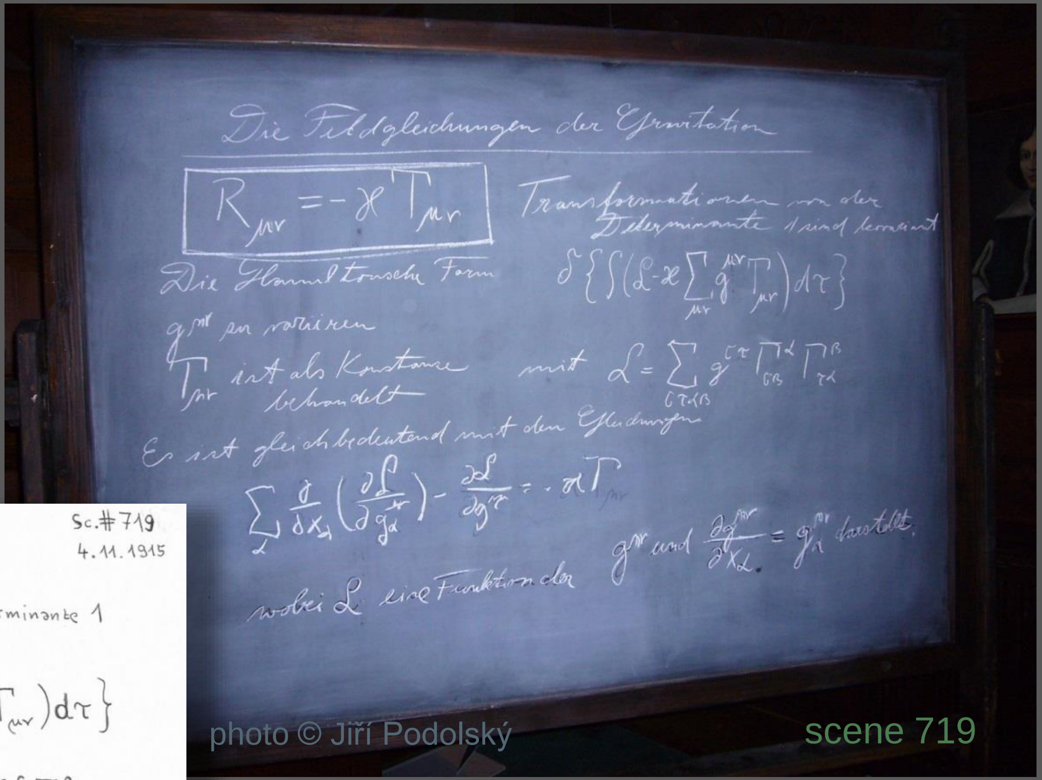
$T_{\mu\nu}$ als Konstante zu behandeln sind

mit $\mathfrak{L} = \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\Gamma^{\beta}_{\tau\alpha}$

Es ist gleichbedeutend mit den Gleichungen

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\varkappa T_{\mu\nu}$$

wobei $\mathfrak{L}$ als Funktion der $g^{\mu\nu}$ und $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} = g^{\mu\nu}_{\alpha}$ zu denken ist.



my template and the blackboard

18.11.1915

original source:

scenes 722, 725

Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. EINSTEIN.

In einer jüngst in diesen Berichten erschienenen Arbeit, habe ich Feldgleichungen der Gravitation aufgestellt, welche bezüglich beliebiger Transformationen von der Determinante 1 kovariant sind. In einem Nachtrage habe ich gezeigt, daß jenen Feldgleichungen allgemein kovariante entsprechen, wenn der Skalar des Energietensors der »Materie« verschwindet, und ich habe dargetan, daß der Einführung dieser Hypothese, durch welche Zeit und Raum der letzten Spur objektiver Realität beraubt werden, keine prinzipiellen Bedenken entgegenstehen[1].

In der vorliegenden Arbeit finde ich eine wichtige Bestätigung dieser radikalsten Relativitätstheorie: es zeigt sich nämlich, daß sie die von LEVERRIER entdeckte säkulare Drehung der Merkurbahn im Sinne der Bahnbewegung, welche etwa 45″ im Jahrhundert beträgt qualitativ und quantitativ erklärt, ohne daß irgendwelche besondere Hypothese zugrunde gelegt werden müßte[2].

Es ergibt sich ferner, daß die Theorie eine stärkere (doppelt so starke) Lichtstrahlenkrümmung durch Gravitationsfelder zur Konsequenz hat als gemäß meinen früheren Untersuchungen.

[1] In einer bald folgenden Mitteilung wird gezeigt werden, daß jene Hypothese entbehrlich ist. Wesentlich ist nur, daß eine solche Wahl des Bezugssystems möglich ist, daß die Determinante $|g_{\mu\nu}|$ den Wert -1 annimmt. Die nachfolgende Untersuchung ist hiervon unabhängig.

[2] Über die Unmöglichkeit, die Anomalien der Merkurbewegung auf der Basis der NEWTONschen Theorie befriedigend zu erklären, schrieb E. FREUNDLICH jüngst einen beachtenswerten Aufsatz (Astr. Nachr. 4803, Bd. 201, Juni 1915).

§ 1. Das Gravitationsfeld.

Aus meinen letzten beiden Mitteilungen geht hervor, daß das Gravitationsfeld im Vakuum bei geeignet gewähltem Bezugssystem folgenden Gleichungen zu genügen hat

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0, \qquad (1)$$

wobei die $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ durch die Gleichung definiert sind

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} = -\sum_{\beta} g^{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \beta \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \sum_{\beta} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right). \qquad (2)$$

Machen wir außerdem die in der letzten Mitteilung begründete Hypothese, daß der Skalar des Energietensors der »Materie« stets verschwinde, so tritt hierzu die Determinantengleichung

$$|g_{\mu\nu}| = -1. \qquad (3)$$

Es befinde sich im Anfangspunkt des Koordinatensystems ein Massenpunkt (die Sonne). Das Gravitationsfeld, welches dieser Massenpunkt erzeugt, kann aus diesen Gleichungen durch sukzessive Approximation berechnet werden.

Es ist indessen wohl zu bedenken, daß die $g_{\mu\nu}$ bei gegebener Sonnenmasse durch die Gleichungen (1) und (3) mathematisch noch nicht vollständig bestimmt sind. Es folgt dies daraus, daß diese Gleichungen bezüglich beliebiger Transformationen mit der Determinante 1 kovariant sind. Es dürfte indessen berechtigt sein, vorauszusetzen, daß alle diese Lösungen durch solche Transformationen aufeinander reduziert werden können, daß sie sich also (bei gegebenen Grenzbedingungen) nur formell, nicht aber physikalisch voneinander unterscheiden. Dieser Überzeugung folgend begnüge ich mich vorerst damit, hier eine Lösung abzuleiten, ohne mich auf die Frage einzulassen, ob es die einzig mögliche sei.

Wir gehen nun in solcher Weise vor. Die $g_{\mu\nu}$ seien in »nullter Näherung« durch folgendes, der ursprünglichen Relativitätstheorie entsprechende Schema gegeben

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}\right\}, \qquad (4)$$

oder kürzere

$$\left.\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= \delta_{\rho\sigma} \\ g_{\rho 4} &= g_{4\rho} = 0 \\ g_{44} &= 1 \end{aligned}\right\}. \qquad (4a)$$

Hierbei bedeuten ρ und σ die Indizes 1, 2, 3; $\delta_{\rho\sigma}$ ist gleich 1 oder 0, je nachdem $\rho = \sigma$ oder $\rho \neq \sigma$ ist.

18.11.1915

original source:

scenes 722, 725

Wir setzen nun im folgenden voraus, daß sich die $g_{\mu\nu}$ von den in (4a) angegebenen Werten nur um Größen unterscheiden, die klein sind gegenüber der Einheit. Diese Abweichungen behandeln wir als kleine Größen »erster Ordnung«, Funktionen $n$ten Grades dieser Abweichungen als »Größen $n$ter Ordnung«. Die Gleichungen (1) und (3) setzen uns in den Stand, von (4a) ausgehend, durch sukzessive Approximation das Gravitationsfeld bis auf Größen $n$ter Ordnung genau zu berechnen. Wir sprechen in diesem Sinne von der »$n$ten Approximation«; die Gleichungen (4a) bilden die »nullte Approximation«.

Die im folgenden gegebene Lösung hat folgende, das Koordinatensystem festlegende Eigenschaften:

1. Alle Komponenten sind von x_4 unabhängig.
2. Die Lösung ist (räumlich) symmetrisch um den Anfangspunkt des Koordinatensystems, in dem Sinne, daß man wieder auf dieselbe Lösung stößt, wenn man sie einer linearen orthogonalen (räumlichen) Transformation unterwirft.
3. Die Gleichungen $g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0$ gelten exakt (für $\rho = 1$ bis 3).
4. Die $g_{\mu\nu}$ besitzen im Unendlichen die in (4a) gegebenen Werte.

Erste Approximation.

Es ist leicht zu verifizieren, daß in Größen erster Ordnung den Gleichungen (1) und (3) sowie den eben genannten 4 Bedingungen genügt wird durch den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= -\delta_{\rho\sigma} + \alpha\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_\rho \partial x_\sigma} - \frac{\delta_{\rho\sigma}}{r}\right) = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha\frac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \\ g_{44} &= 1 - \frac{\alpha}{r} \end{aligned}\right\}. \quad (4b)$$

Die $g_{4\rho}$ bzw. $g_{\rho 4}$ sind dabei durch Bedingung 3 festgelegt. r bedeutet die Größe $+\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, α eine durch die Sonnenmasse bestimmte Konstante.

Daß (3) in Gliedern erster Ordnung erfüllt ist, sieht man sogleich. Um in einfacher Weise einzusehen, daß auch die Feldgleichungen (1) in erster Näherung erfüllt sind, braucht man nur zu beachten, daß bei Vernachlässigung von Größen zweiter und höherer Ordnung die linke Seite der Gleichungen (1) sukzessive durch

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}$$

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu \\ \alpha\end{bmatrix}$$

versetzt werden kann, wobei α nur von 1—3 läuft.

Wie man aus (4b) ersieht, bringt es unsere Theorie mit sich, daß im Falle einer ruhenden Masse die Komponenten g_{11} bis g_{33} bereits in den Größen erster Ordnung von null verschieden sind. Wir werden später sehen, daß hierdurch kein Widerspruch gegenüber NEWTONS Gesetz (in erster Näherung) entsteht. Wohl aber ergibt sich hieraus ein etwas anderer Einfluß des Gravitationsfeldes auf einen Lichtstrahl als nach meinen früheren Arbeiten; denn die Lichtgeschwindigkeit ist durch die Gleichung

$$\sum g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0 \qquad (5)$$

bestimmt. Unter Anwendung von HUYGENS' Prinzip findet man aus (5) und (4b) durch eine einfache Rechnung, daß ein an der Sonne im Abstand Δ vorbeigehender Lichtstrahl eine Winkelablenkung von der Größe $\frac{2\alpha}{\Delta}$ erleidet, während die früheren Rechnungen, bei welchen die Hypothese $\sum T^\mu_\mu = 0$ nicht zugrunde gelegt war, den Wert $\frac{\alpha}{\Delta}$ ergeben hatten. Ein an der Oberfläche der Sonne vorbeigehender Lichtstrahl soll eine Ablenkung von 1.7″ (statt 0.85″) erleiden. Hingegen bleibt das Resultat betreffend die Verschiebung der Spektrallinien durch das Gravitationspotential, welches durch Herrn FREUNDLICH an den Fixsternen der Größenordnung nach bestätigt wurde, ungeändert bestehen, da dieses nur von g_{44} abhängt.

Nachdem wir die $g_{\mu\nu}$ in erster Näherung erlangt haben, können wir auch die Komponenten $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes in erster Näherung berechnen. Aus (2) und (4b) ergibt sich

$$\Gamma^\tau_{\rho\sigma} = -\alpha\left(\delta_{\rho\sigma}\frac{x_\tau}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{x_\rho x_\sigma x_\tau}{r^5}\right), \qquad (6a)$$

wobei ρ, σ, τ irgendwelche der Indizes 1, 2, 3 bedeuten,

$$\Gamma^\sigma_{44} = \Gamma^4_{4\sigma} = -\frac{\alpha}{2}\frac{x_\sigma}{r^3}, \qquad (6b)$$

wobei σ den Index 1, 2 oder 3 bedeutet. Diejenigen Komponenten, in welchen der Index 4 einmal oder dreimal auftritt, verschwinden.

Zweite Approximation.

Es wird sich nachher ergeben, daß wir nur die drei Komponenten Γ^σ_{44} in Größen zweiter Ordnung genau zu ermitteln brauchen, um die Planetenbahnen mit dem entsprechenden Genauigkeitsgrade ermitteln zu können. Hierfür genügt uns die letzte Feldgleichung zu-

18.11.1915

original source:

scenes 722, 725

sammen mit den allgemeinen Bedingungen, welche wir unserer Lösung auferlegt haben. Die letzte Feldgleichung

$$\sum_\sigma \frac{\partial \Gamma^\sigma_{44}}{\partial x_\sigma} + \sum_{\sigma\tau} \Gamma^\sigma_{4\tau} \Gamma^\tau_{4\sigma} = 0$$

geht mit Rücksicht auf (6b) bei Vernachlässigung von Größen dritter und höherer Ordnung über in

$$\sum_\sigma \frac{\partial \Gamma^\sigma_{44}}{\partial x_\sigma} = \frac{\alpha^2}{2r^4}.$$

Hieraus folgern wir mit Rücksicht auf (6b) und die Symmetrieeigenschaften unserer Lösung

$$\Gamma^\sigma_{44} = -\frac{\alpha}{2}\frac{x_\sigma}{r^3}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right). \qquad (6\text{c})$$

§ 2. Die Planetenbewegung.

Die von der allgemeinen Relativitätstheorie gelieferten Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im Schwerefelde lauten

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = \sum_{\sigma\tau} \Gamma^\nu_{\sigma\tau} \frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\tau}{ds}. \qquad (7)$$

Aus diesen Gleichungen folgern wir zunächst, daß sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen als erste Näherung enthalten. Wenn nämlich die Bewegung des Punktes mit gegen die Lichtgeschwindigkeit kleiner Geschwindigkeit stattfindet, so sind dx_1, dx_2, dx_3 klein gegen dx_4. Folglich bekommen wir eine erste Näherung, indem wir auf der rechten Seite jeweilen nur das Glied $\sigma = \tau = 4$ berücksichtigen. Man erhält dann mit Rücksicht auf (6b)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_\nu}{ds^2} &= \Gamma^\nu_{44} = -\frac{\alpha}{2}\frac{x_\nu}{r^3} \; (\nu = 1, 2, 3) \\ \frac{d^2 x_4}{ds^2} &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (7\text{a})$$

Diese Gleichungen zeigen, daß man für eine erste Näherung $s = x_4$ setzen kann. Dann sind die ersten drei Gleichungen genau die Newtonschen. Führt man in der Bahnebene Polargleichungen r, ϕ ein, so liefern der Energie- und der Flächensatz bekanntlich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}u^2 + \Phi &= A \\ r^2\frac{d\phi}{ds} &= B \end{aligned}\right\}, \qquad (8)$$

wobei A und B die Konstanten des Energie- bzw. Flächensatzes bedeuten, wobei zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= -\frac{\alpha}{2r} \\ u^2 &= \frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{ds^2} \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{a})$$

gesetzt ist.

Wir haben nun die Gleichungen (7) um eine Größenordnung genauer auszuwerten. Die letzte der Gleichungen (7) liefert dann zusammen mit (6b)

$$\frac{d^2 x_4}{ds^2} = 2\sum_\sigma \Gamma^4_{\sigma 4}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_4}{ds} = -\frac{dg_{44}}{ds}\frac{dx_4}{ds}$$

oder in Größen erster Ordnung genau

$$\frac{dx_4}{ds} = 1 + \frac{\alpha}{r}. \qquad (9)$$

Wir wenden uns nun zu den ersten drei Gleichungen (7). Die rechte Seite liefert

a) für die Indexkombination $\sigma = \tau = 4$

$$\Gamma^\nu_{44}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2$$

oder mit Rücksicht auf (6c) und (9) in Größen zweiter Ordnung genau

$$-\frac{\alpha}{2}\frac{x_\nu}{r^3}\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right).$$

b) für die Indexkombinationen $\sigma \neq 4$ $\tau \neq 4$ (welche allein noch in Betracht kommen) mit Rücksicht darauf, daß die Produkte $\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\tau}{ds}$ mit Rücksicht auf (8) als Größen erster Ordnung anzusehen sind[1], ebenfalls auf Größen zweiter Ordnung genau

$$-\frac{\alpha x_\nu}{r^3}\sum_{\sigma\tau}\left(\delta_{\sigma\tau} - \frac{3}{2}\frac{x_\sigma x_\tau}{r^2}\right)\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\tau}{ds}.$$

Die Summation ergibt

$$-\frac{\alpha x_\nu}{r^3}\left(u^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right).$$

[1] Diesem Umstand entsprechend können wir uns bei den Feldkomponenten $\Gamma^\nu_{\sigma\tau}$ mit der in Gleichung (6a) gegebenen ersten Näherung begnügen.

18.11.1915

original source:

scenes 722, 725

Mit Rücksicht hierauf erhält man für die Bewegungsgleichungen die in Größen zweiter Ordnung genaue Form

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = -\frac{\alpha}{2}\frac{x_\nu}{r^3}\left(1 + \frac{\alpha}{r} + 2u^2 - 3\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right), \qquad (7\text{b})$$

welche zusammen mit (9) die Bewegung des Massenpunktes bestimmt. Nebenbei sei bemerkt, daß (7b) und (9) für den Fall der Kreisbewegung keine Abweichungen vom dritten KEPLERschen Gesetze ergeben.

Aus (7b) folgt zunächst die exakte Gültigkeit der Gleichung

$$r^2\frac{d\phi}{ds} = B, \qquad (10)$$

wobei B eine Konstante bedeutet. Der Flächensatz gilt also in Größen zweiter Ordnung genau, wenn man die »Eigenzeit« des Planeten zur Zeitmessung verwendet. Um nun die säkulare Drehung der Bahnellipse aus (7b) zu ermitteln, ersetzt man die Glieder erster Ordnung in der Klammer der sechsten Seite am vorteilhaftesten vermittels (10) und der ersten der Gleichungen (8), durch welches Vorgehen die Glieder zweiter Ordnung auf der rechten Seite nicht geändert werden. Die Klammer nimmt dadurch die Form an

$$\left(1 - 2A + \frac{3B^2}{r^2}\right).$$

Wählt man endlich $s\sqrt{1-2A}$ als Zeitvariable, und nennt man letztere wieder s, so hat man bei etwas geänderter Bedeutung der Konstanten B:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_\nu}{ds^2} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \\ \Phi &= -\frac{\alpha}{2}\left[1 + \frac{B^2}{r^2}\right] \end{aligned}\right\}. \qquad (7\text{c})$$

Bei der Bestimmung der Bahnform geht man nun genau vor wie im NEWTONschen Falle. Aus (7c) erhält man zunächst

$$\frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{ds^2} = 2A - 2\Phi.$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung ds mit Hilfe von (10), so ergibt sich, indem man mit x die Größe $\frac{1}{r}$ bezeichnet:

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3, \qquad (11)$$

welche Gleichung sich von der entsprechenden der NEWTONschen Theorie nur durch das letzte Glied der rechten Seite unterscheidet.

Der vom Radiusvektor zwischen dem Perihel und dem Aphel beschriebene Winkel wird demnach durch das elliptische Integral

$$\phi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3}},$$

wobei α_1 und α_2 diejenigen Wurzeln der Gleichung

$$\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3 = 0$$

bedeuten, welchen sehr benachbarte Wurzeln derjenigen Gleichung entsprechen, die aus dieser durch Weglassen des letzten Gliedes entsteht.

Hierfür kann mit der von uns zu fordernden Genauigkeit gesetzt werden

$$\phi = [1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2)] \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(1-\alpha x)}}$$

oder nach Entwicklung von $(1 - \alpha x)^{-\frac{1}{2}}$

$$\phi = [1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2)] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2}x\right)dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}}.$$

Die Integration liefert

$$\phi = \pi\left[1 + \frac{3}{4}\alpha(\alpha_1 + \alpha_2)\right],$$

oder, wenn man bedenkt, daß α_1 und α_2 die reziproken Werte der maximalen bzw. minimalen Sonnendistanz bedeuten,

$$\phi = \pi\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\alpha}{a(1-e^2)}\right). \qquad (12)$$

Bei einem ganzen Umlauf rückt also das Perihel um

$$\varepsilon = 3\pi\frac{\alpha}{a(1-e^2)} \qquad (13)$$

im Sinne der Bahnbewegung vor, wenn mit a die große Halbachse, mit e die Exzentrizität bezeichnet wird. Führt man die Umlaufszeit T

18.11.1915

original source:

scenes 722, 725

(in Sekunden) ein, so erhält man, wenn c die Lichtgeschwindigkeit in cm/sec. bedeutet:

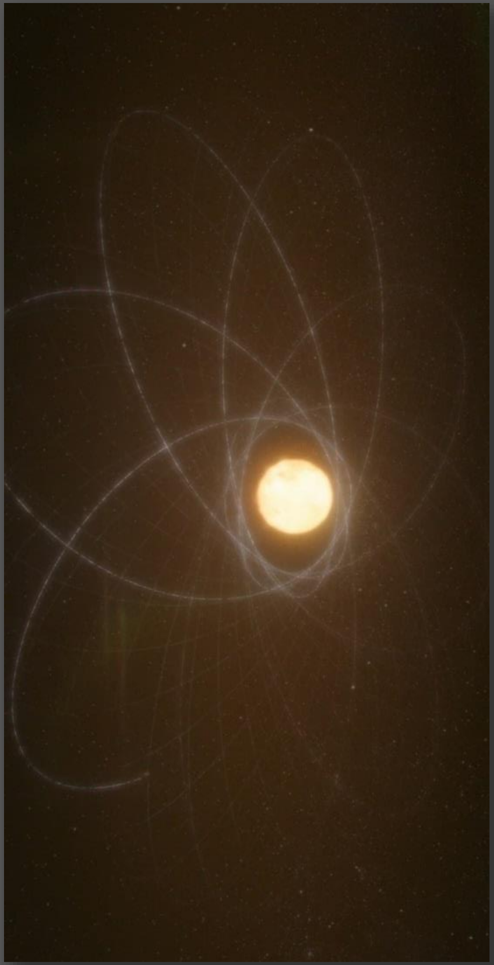
$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}. \qquad (14)$$

Die Rechnung liefert für den Planeten Merkur ein Vorschreiten des Perihels um 43″ in hundert Jahren, während die Astronomen 45″ ± 5″ als unerklärten Rest zwischen Beobachtungen und Newtonscher Theorie angeben. Dies bedeutet volle Übereinstimmung.

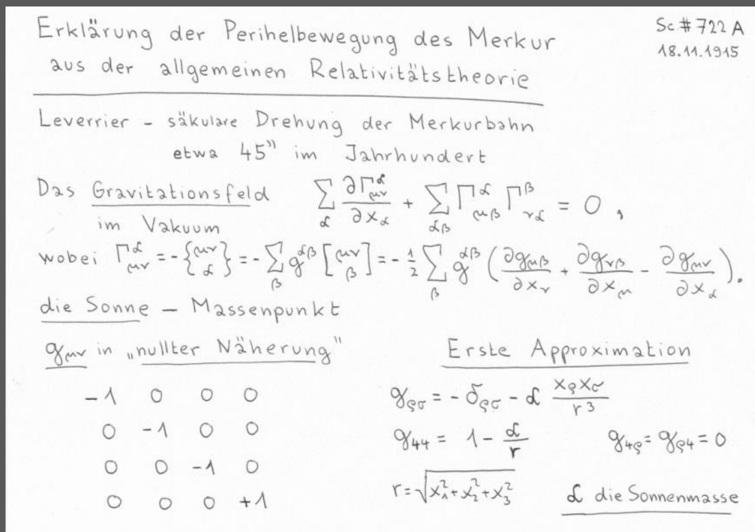
Für Erde und Mars geben die Astronomen eine Vorwärtsbewegung von 11″ bzw. 9″ in hundert Jahren an, während unsere Formel nur 4″ bzw. 1″ liefert. Es scheint jedoch diesen Angaben wegen der zu geringen Exzentrizität der Bahnen jener Planeten ein geringer Wert eigen zu sein. Maßgebend für die Sicherheit der Konstatierung der Perihelbewegung ist ihr Produkt mit der Exzentrizität $\left(e\frac{d\pi}{dt}\right)$. Betrachtet man die für diese Größe von Newcomb angegebenen Werte

	$e\frac{d\pi}{dt}$
Merkur	8.48″ ± 0.43
Venus	−0.05 ± 0.25
Erde	0.10 ± 0.13
Mars	0.75 ± 0.35 .

welche ich Hrn. Dr. Freundlich verdanke, so gewinnt man den Eindruck, daß ein Vorrücken des Perihels überhaupt nur für Merkur wirklich nachgewiesen ist. Ich will jedoch ein endgültiges Urteil hierüber gerne den Fachastronomen überlassen.



18.11.1915: perihelion precession of Mercury



Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie

Sc # 722 A
18.11.1915

Leverrier - säkulare Drehung der Merkurbahn etwa 45" im Jahrhundert

Das Gravitationsfeld im Vakuum $\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = 0$,

wobei $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = -\left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\} = -\sum_\beta g^{\alpha\beta}\left[{\mu\nu \atop \beta}\right] = -\frac{1}{2} \sum_\beta g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)$.

die Sonne — Massenpunkt

$g_{\mu\nu}$ in „nullter Näherung"

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$$

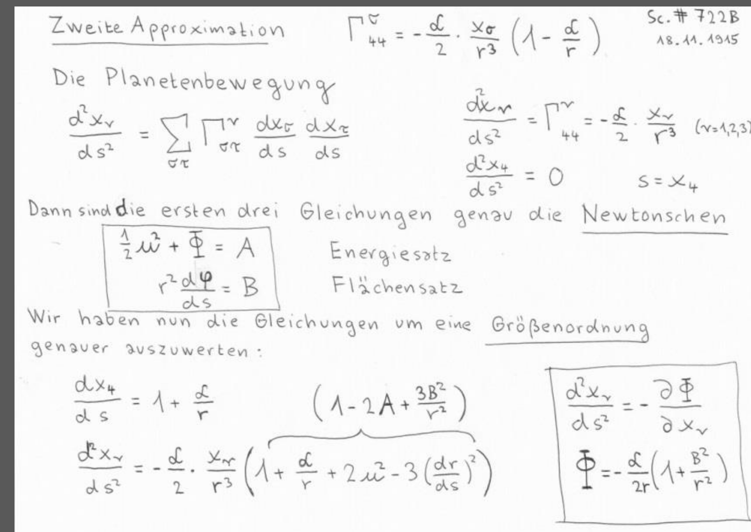
Erste Approximation

$$g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha \frac{x_\rho x_\sigma}{r^3}$$

$$g_{44} = 1 - \frac{\alpha}{r} \qquad g_{4\rho} = g_{\rho 4} = 0$$

$$r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

α die Sonnenmasse



Zweite Approximation $\Gamma^\sigma_{44} = -\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{x_\sigma}{r^3}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)$

Sc. # 722B
18.11.1915

Die Planetenbewegung

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} = \sum_{\sigma\tau}\Gamma^\nu_{\sigma\tau}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\tau}{ds}$$

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} = \Gamma^\nu_{44} = -\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{x_\nu}{r^3} \quad (\nu=1,2,3)$$

$$\frac{d^2x_4}{ds^2} = 0 \qquad s = x_4$$

Dann sind die ersten drei Gleichungen genau die Newtonschen

$$\boxed{\begin{matrix} \frac{1}{2}u^2 + \Phi = A \\ r^2\frac{d\varphi}{ds} = B \end{matrix}}$$

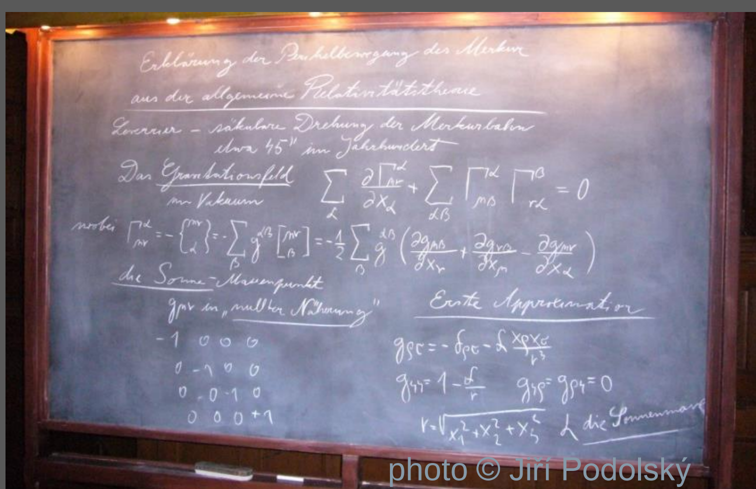
Energiesatz
Flächensatz

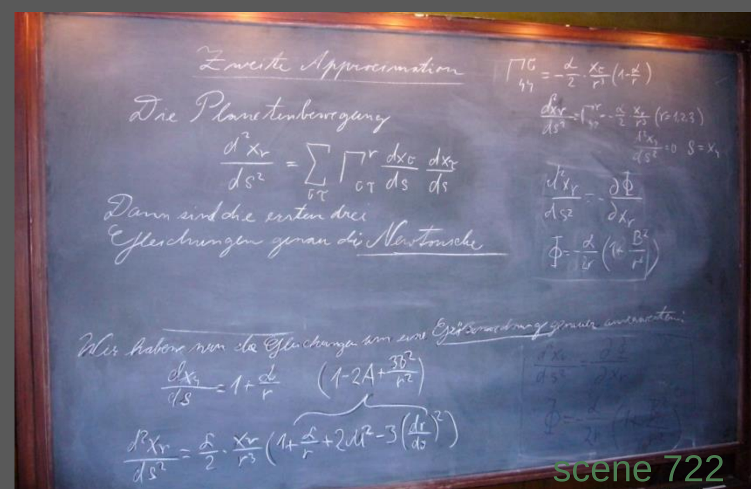
Wir haben nun die Gleichungen um eine Größenordnung genauer auszuwerten:

$$\frac{dx_4}{ds} = 1 + \frac{\alpha}{r}$$

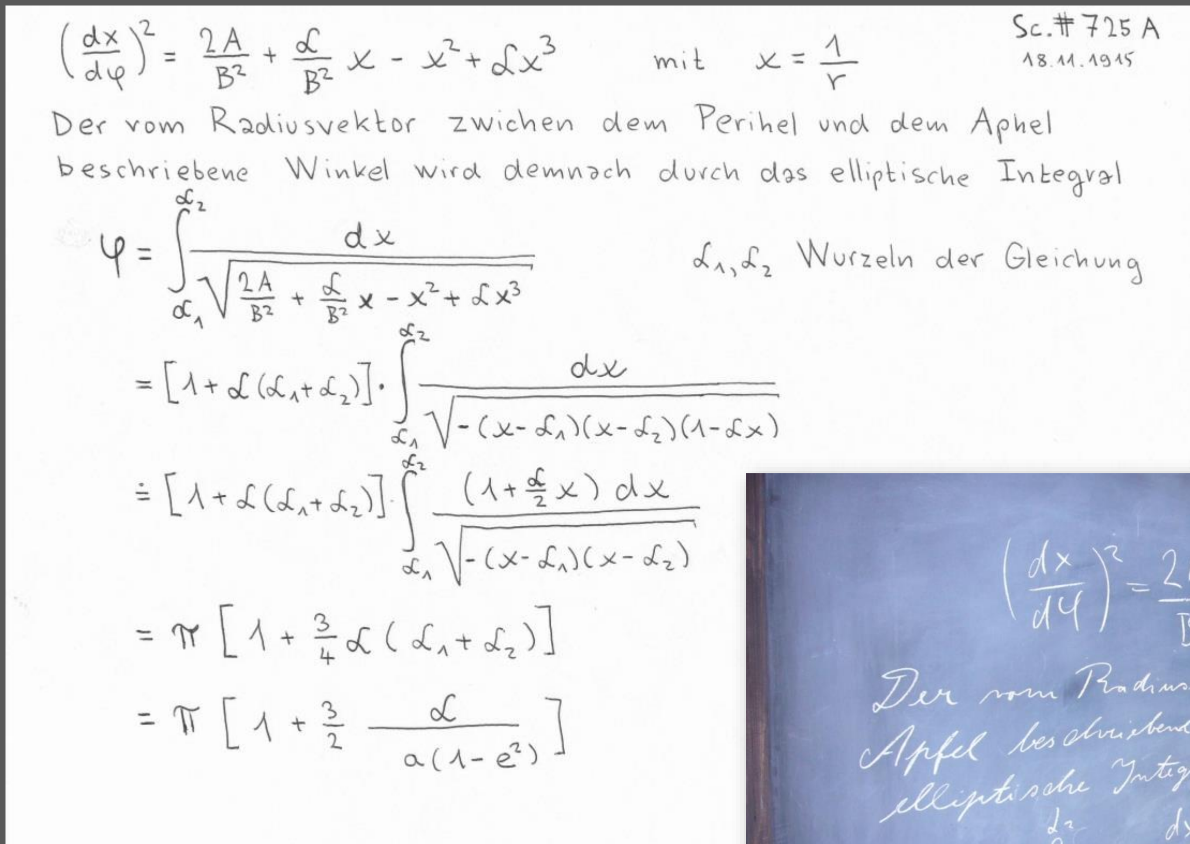
$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} = -\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{x_\nu}{r^3}\left(\overbrace{1+\frac{\alpha}{r}+2u^2-3\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}^{\left(1-2A+\frac{3B^2}{r^2}\right)}\right)$$

$$\boxed{\begin{matrix} \frac{d^2x_\nu}{ds^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu} \\ \Phi = -\frac{\alpha}{2r}\left(1+\frac{B^2}{r^2}\right) \end{matrix}}$$





18.11.1915: perihelion precession of Mercury



Sc. # 725 A
18.11.1915

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3 \qquad \text{mit} \quad x = \frac{1}{r}$$

Der vom Radiusvektor zwichen dem Perihel und dem Aphel beschriebene Winkel wird demnach durch das elliptische Integral

$$\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3}}$$

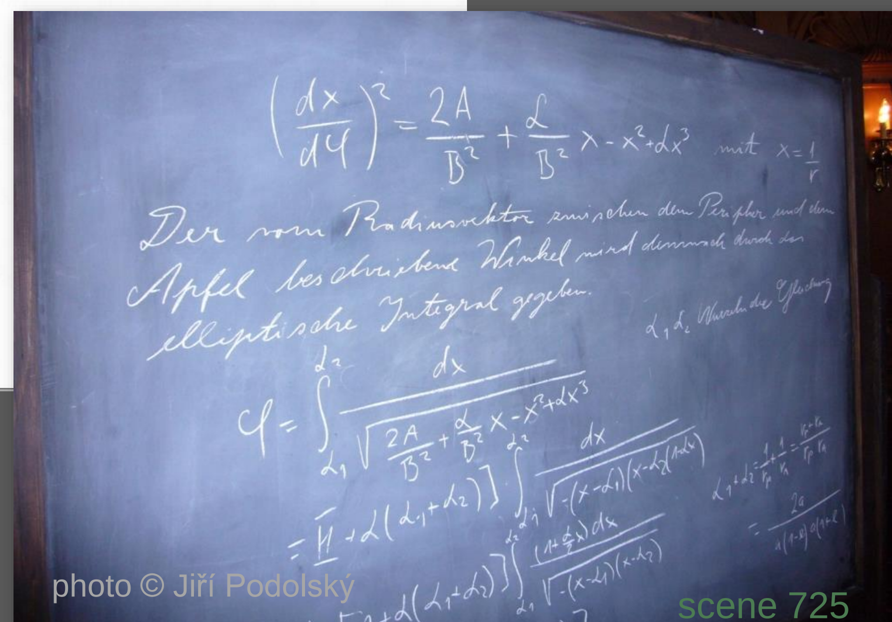
α_1, α_2 Wurzeln der Gleichung

$$= \left[1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2)\right] \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(1-\alpha x)}}$$

$$\doteq \left[1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2)\right] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2}x\right)dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}}$$

$$= \pi\left[1 + \frac{3}{4}\alpha(\alpha_1 + \alpha_2)\right]$$

$$= \pi\left[1 + \frac{3}{2}\frac{\alpha}{a(1-e^2)}\right]$$



18.11.1915: perihelion precession of Mercury

Sc.#725B
18.11.1915

Bei einem ganzen Umlauf rückt das Perihel um

$$\boxed{\varepsilon = 3\pi \frac{\alpha}{a(1-e^2)}}$$

a die große Halbachse

e die Exzentrizität

die Umlaufzeit T (in sekunden)

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}$$

Die Rechnung liefert für den Planeten Merkur

ein Vorschreiten des Perihels um $\boxed{43'' \text{ in hundert Jahren}}$

während die Astronomen $45'' \pm 5''$

als unerklärten Rest zwischen Beobachtungen

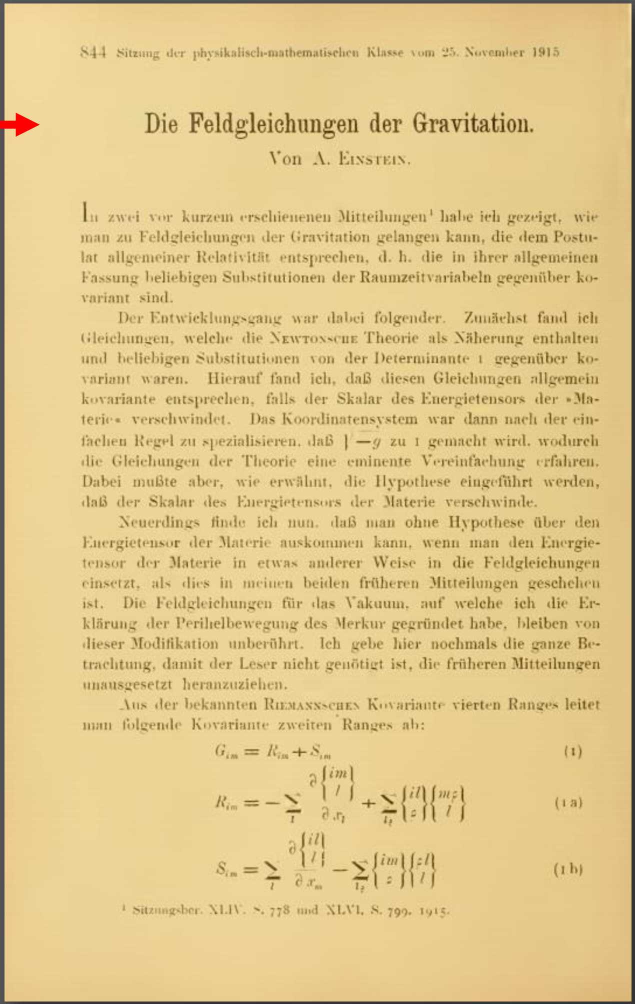
und Newtonscher Theorie angeben.

Dies bedeutet volle Übereinstimmung.

25.11.1915

original source:

scene 732



Die Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen[1] habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariabeln gegenüber kovariant sind.

Der Entwicklungsgang war dabei folgender. Zunächst fand ich Gleichungen, welche die Newtonsche Theorie als Näherung enthalten und beliebigen Substitutionen von der Determinante 1 gegenüber kovariant waren. Hierauf fand ich, daß diesen Gleichungen allgemein kovariante entsprechen, falls der Skalar des Energietensors der »Materie« verschwindet. Das Koordinatensystem war dann nach der einfachen Regel zu spezialisieren, daß $\sqrt{-g}$ zu 1 gemacht wird, wodurch die Gleichungen der Theorie eine eminente Vereinfachung erfahren. Dabei mußte aber, wie erwähnt, die Hypothese eingeführt werden, daß der Skalar des Energietensors der Materie verschwinde.

Neuerdings finde ich nun, daß man ohne Hypothese über den Energietensor der Materie auskommen kann, wenn man den Energietensor der Materie in etwas anderer Weise in die Feldgleichungen einsetzt, als dies in meinen beiden früheren Mitteilungen geschehen ist. Die Feldgleichungen für das Vakuum, auf welche ich die Erklärung der Perihelbewegung des Merkur gegründet habe, bleiben von dieser Modifikation unberührt. Ich gebe hier nochmals die ganze Betrachtung, damit der Leser nicht genötigt ist, die früheren Mitteilungen unausgesetzt heranzuziehen.

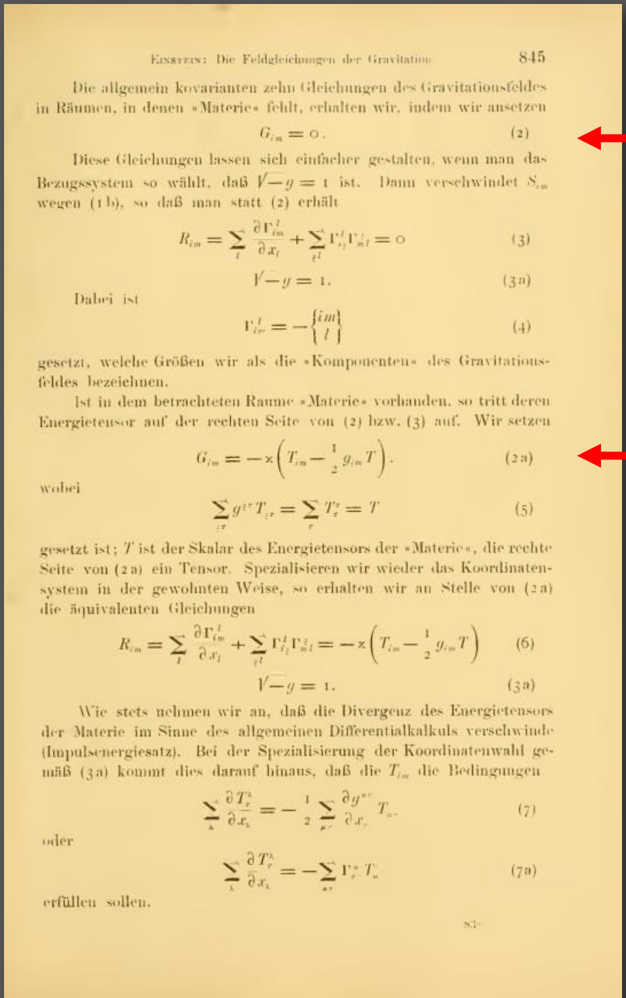
Aus der bekannten Riemannschen Kovariante vierten Ranges leitet man folgende Kovariante zweiten Ranges ab:

$$G_{im} = R_{im} + S_{im} \tag{1}$$

$$R_{im} = -\sum_{l} \frac{\partial \begin{Bmatrix} im \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_{l\varrho} \begin{Bmatrix} il \\ \varrho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m\varrho \\ l \end{Bmatrix} \tag{1a}$$

$$S_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \sum_{l\varrho} \begin{Bmatrix} im \\ \varrho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varrho l \\ l \end{Bmatrix} \tag{1b}$$

[1] Sitzungsber. XLIV, S. 778 und XLVI, S. 799, 1915.



Die allgemein kovarianten zehn Gleichungen des Gravitationsfeldes in Räumen, in denen »Materie« fehlt, erhalten wir, indem wir ansetzen

$$G_{im} = 0\,. \tag{2}$$

Diese Gleichungen lassen sich einfacher gestalten, wenn man das Bezugssystem so wählt, daß $\sqrt{-g} = 1$ ist. Dann verschwindet S_{im} wegen (1b), so daß man statt (2) erhält

$$R_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \Gamma^l_{im}}{\partial x_l} + \sum_{\varrho l} \Gamma^l_{i\varrho} \Gamma^\varrho_{ml} = 0 \tag{3}$$

$$\sqrt{-g} = 1\,. \tag{3a}$$

Dabei ist

$$\Gamma^l_{im} = -\begin{Bmatrix} im \\ l \end{Bmatrix} \tag{4}$$

gesetzt, welche Größen wir als die »Komponenten« des Gravitationsfeldes bezeichnen.

Ist in dem betrachteten Raume »Materie« vorhanden, so tritt deren Energietensor auf der rechten Seite von (2) bzw. (3) auf. Wir setzen

$$G_{im} = -\varkappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right)\,. \tag{2a}$$

wobei

$$\sum_{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} T_{\varrho\sigma} = \sum_{\sigma} T^\sigma_\sigma = T \tag{5}$$

gesetzt ist; T ist der Skalar des Energietensors der »Materie«, die rechte Seite von (2a) ein Tensor. Spezialisieren wir wieder das Koordinatensystem in der gewohnten Weise, so erhalten wir an Stelle von (2a) die äquivalenten Gleichungen

$$R_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \Gamma^l_{im}}{\partial x_l} + \sum_{\varrho l} \Gamma^l_{i\varrho} \Gamma^\varrho_{ml} = -\varkappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right) \tag{6}$$

$$\sqrt{-g} = 1\,. \tag{3a}$$

Wie stets nehmen wir an, daß die Divergenz des Energietensors der Materie im Sinne des allgemeinen Differentialkalkuls verschwinde (Impulsenergiesatz). Bei der Spezialisierung der Koordinatenwahl gemäß (3a) kommt dies darauf hinaus, daß die T_{im} die Bedingungen

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial T^\lambda_\sigma}{\partial x_\lambda} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_{\mu\nu} \tag{7}$$

oder

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial T^\lambda_\sigma}{\partial x_\lambda} = -\sum_{\mu\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} T^\nu_\mu \tag{7a}$$

erfüllen sollen.

25.11.1915

original source:

scene 732

Multipliziert man (6) mit $\frac{\partial g^{im}}{\partial x_\sigma}$ und summiert über i und m, so erhält man[1] mit Rücksicht auf (7) und auf die aus (3a) folgende Relation

$$\frac{1}{2}\sum_{im} g_{im}\frac{\partial g^{im}}{\partial x_\sigma} = -\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = 0$$

den Erhaltungssatz für Materie und Gravitationsfeld zusammen in der Form

$$\sum_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda}(T_\sigma^\lambda + t_\sigma^\lambda) = 0, \qquad (8)$$

wobei t_σ^λ (der »Energietensor« des Gravitationsfeldes) gegeben ist durch

$$\varkappa t_\sigma^\lambda = \frac{1}{2}\delta_\sigma^\lambda \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \sum g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\lambda_{\nu\alpha}. \qquad (8\text{a})$$

Die Gründe, welche mich zur Einführung des zweiten Gliedes auf der rechten Seite von (2a) und (6) veranlaßt haben, erhellen erst aus den folgenden Überlegungen, welche den an der soeben angeführten Stelle (S. 785) gegebenen völlig analog sind.

Multiplizieren wir (6) mit g^{im} und summieren wir über die Indizes i und m, so erhalten wir nach einfacher Rechnung

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \varkappa(T+t) = 0. \qquad (9)$$

wobei entsprechend (5) zur Abkürzung gesetzt ist

$$\sum_{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} t_{\varrho\sigma} = \sum_\sigma t_\sigma^\sigma = t. \qquad (8\text{b})$$

Man beachte, daß es unser Zusatzglied mit sich bringt, daß in (9) der Energietensor des Gravitationsfeldes neben dem der Materie in gleicher Weise auftritt, was in Gleichung (21) a. a. O. nicht der Fall ist.

Ferner leitet man an Stelle der Gleichung (22) a. a. O. auf dem dort angegebenen Wege mit Hilfe der Energiegleichung die Relationen ab:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \varkappa(T+t)\right] = 0. \qquad (10)$$

Unser Zusatzglied bringt es mit sich, daß diese Gleichungen gegenüber (9) keine neue Bedingung enthalten, so daß über den Energie-

[1] Über die Ableitung vgl. Sitzungsber. XLIV, 1915, S. 784/785. Ich ersuche den Leser, für das Folgende auch die dort auf S. 785 gegebenen Entwicklungen zum Vergleiche heranzuziehen.

tensor der Materie keine andere Voraussetzung gemacht werden muß als die, daß er dem Impulsenergiesatze entspricht.

Damit ist endlich die allgemeine Relativitätstheorie als logisches Gebäude abgeschlossen. Das Relativitätspostulat in seiner allgemeinsten Fassung, welches die Raumzeitkoordinaten zu physikalisch bedeutungslosen Parametern macht, führt mit zwingender Notwendigkeit zu einer ganz bestimmten Theorie der Gravitation, welche die Perihelbewegung des Merkur erklärt. Dagegen vermag das allgemeine Relativitätspostulat uns nichts über das Wesen der übrigen Naturvorgänge zu offenbaren, was nicht schon die spezielle Relativitätstheorie gelehrt hätte. Meine in dieser Hinsicht neulich an dieser Stelle geäußerte Meinung war irrtümlich. Jede der speziellen Relativitätstheorie gemäße physikalische Theorie kann vermittels des absoluten Differentialkalkuls in das System der allgemeinen Relativitätstheorie eingereiht werden, ohne daß letztere irgendein Kriterium für die Zulässigkeit jener Theorie lieferte.

Ausgegeben am 2. Dezember.

25.11.1915: final field equations

Die Feldgleichungen der Gravitation

Sc. #732A
25.11.1915

Aus der bekannten Riemannschen Kovariante vierten Ranges leitet man folgende Kovariante zweiten Ranges ab:

$G_{im} = R_{im} + S_{im}$ mit $R_{im} = -\sum_{l} \frac{\partial \left\{ {im \atop l} \right\}}{\partial x_l} + \sum_{l\rho} \left\{ {il \atop \rho} \right\} \left\{ {m\rho \atop l} \right\}$

$$S_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \left\{ {il \atop l} \right\}}{\partial x_m} - \sum_{l\rho} \left\{ {im \atop \rho} \right\} \left\{ {\rho l \atop l} \right\}$$

Die allgemein kovarianten zehn Gleichungen in Räumen, in denen „Materie" fehlt:

$$\boxed{G_{im} = 0}$$

Diese Gleichungen lassen sich einfacher gestalten, wenn man das Bezugssystem so wählt, daß $\sqrt{-g} = 1$ ist.

$S_{im} = 0$, $\quad R_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \Gamma^{l}_{im}}{\partial x_l} + \sum_{\rho l} \Gamma^{l}_{i\rho} \Gamma^{\rho}_{ml} = 0$.

Sc. # 732 B
25.11.1915

Ist in dem Raume „Materie" vorhanden, so tritt deren Energietensor auf der rechten Seite.

Wir setzen $\boxed{G_{im} = -\varkappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right)}$

wobei $\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} = \sum_{\sigma} T^{\sigma}_{\sigma} = T$ gesetzt ist.

T ist der Skalar des Energietensor der „Materie"

Wie stets nehmen wir an, daß die Divergenz des Energietensors der Materie im Sinne des allgemeinen Differentialkalkuls verschwinde. Den Erhaltungssatz für Materie und Gravitationsfeld zusammen: $\boxed{\sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left(T^{\lambda}_{\sigma} + t^{\lambda}_{\sigma} \right) = 0}$

wobei t^{λ}_{σ} gegeben ist durch

$$\varkappa t^{\lambda}_{\sigma} = \frac{1}{2} \delta^{\lambda}_{\sigma} \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \sum_{\mu\nu\alpha} g^{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} \Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha} .$$

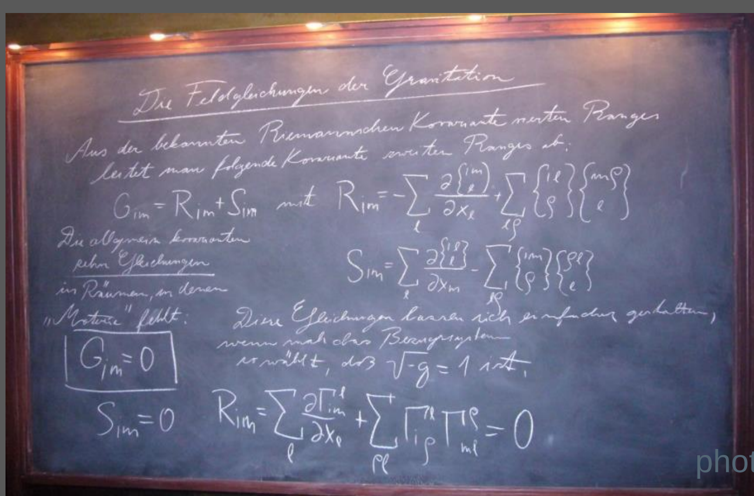


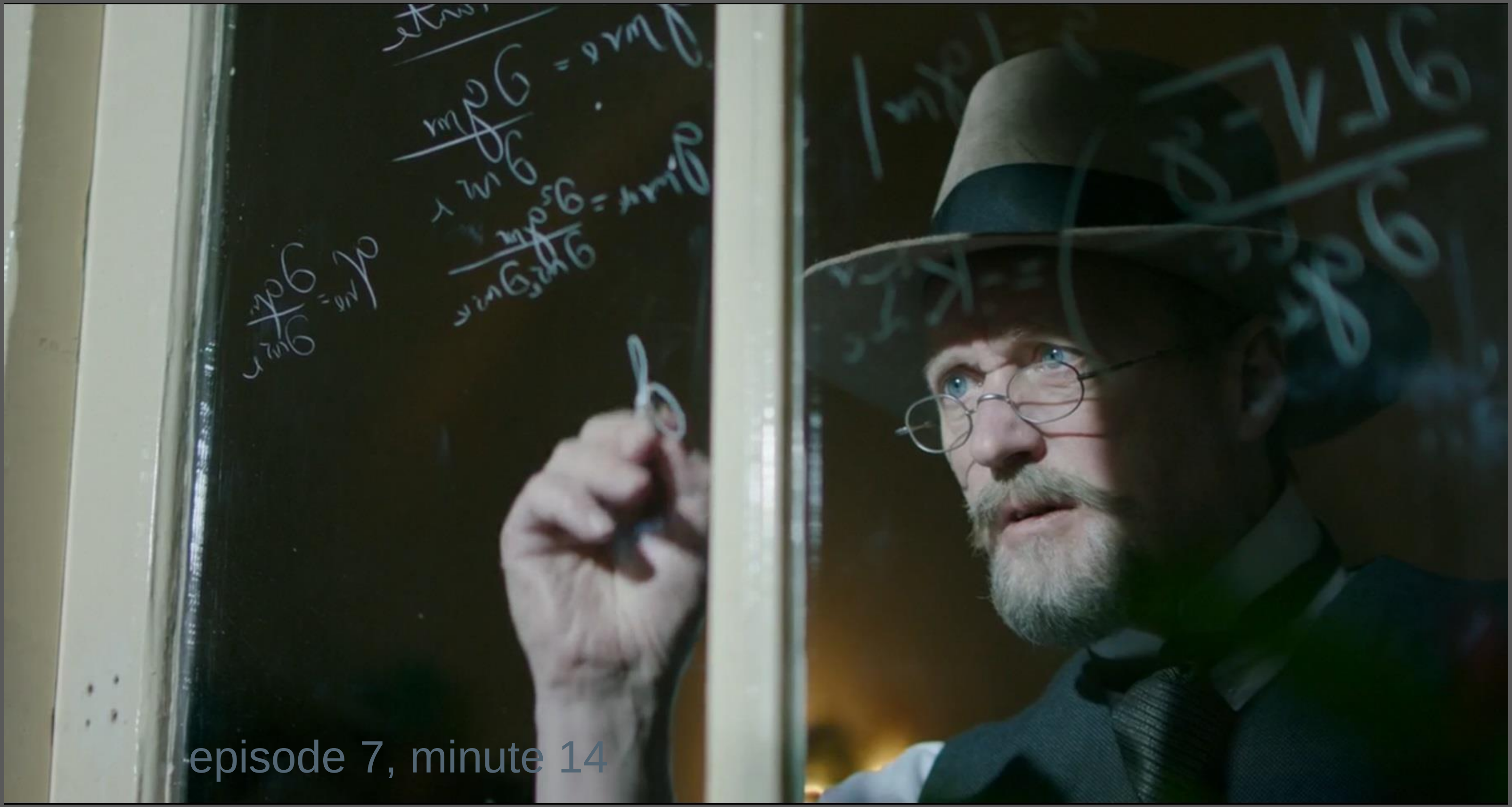
photo © Jiří Podolský

scene 732

Genius.

NATIONAL GEOGRAPHIC

Einstein versus Hilbert
November 1915

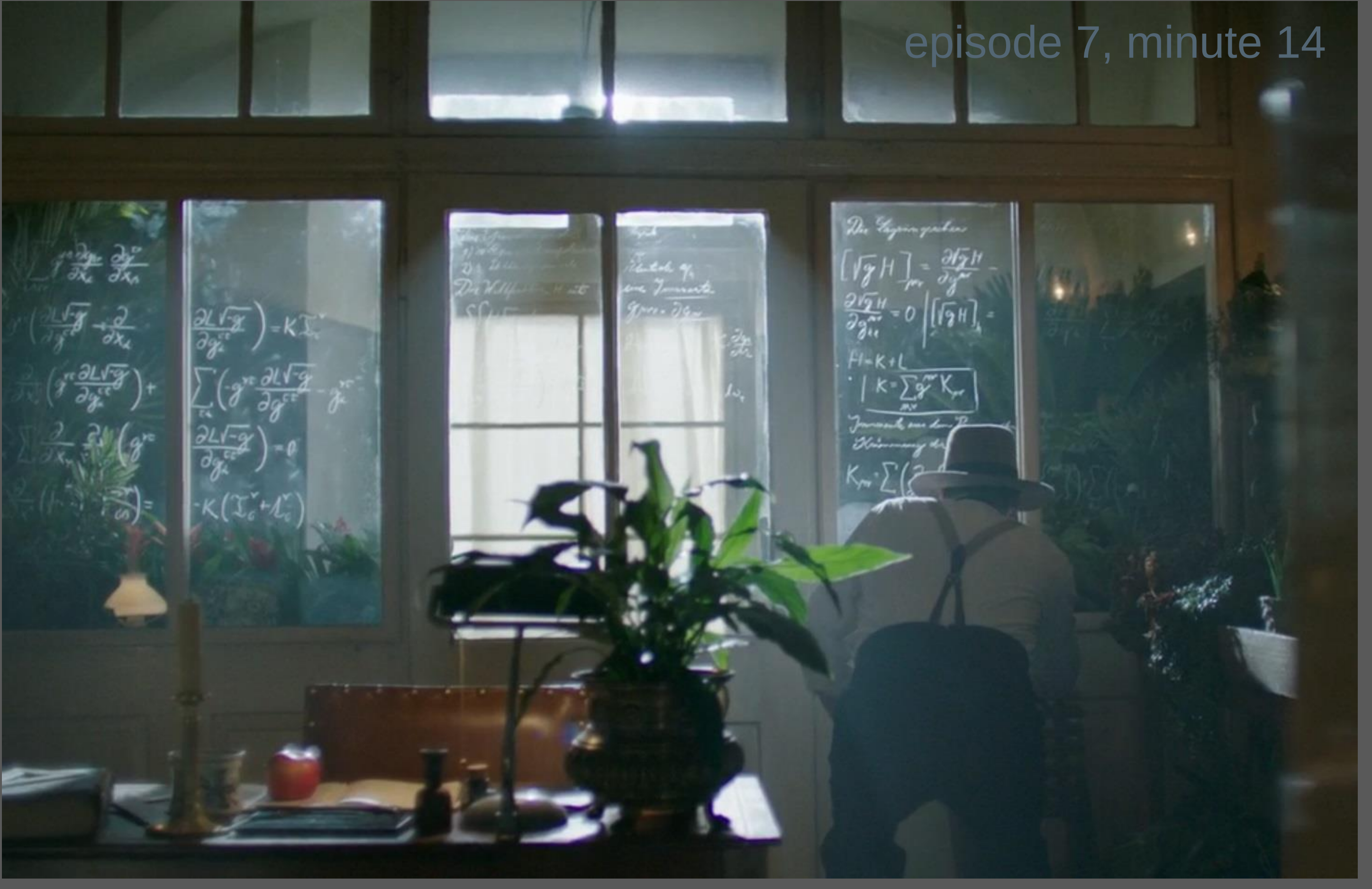


episode 7, minute 14

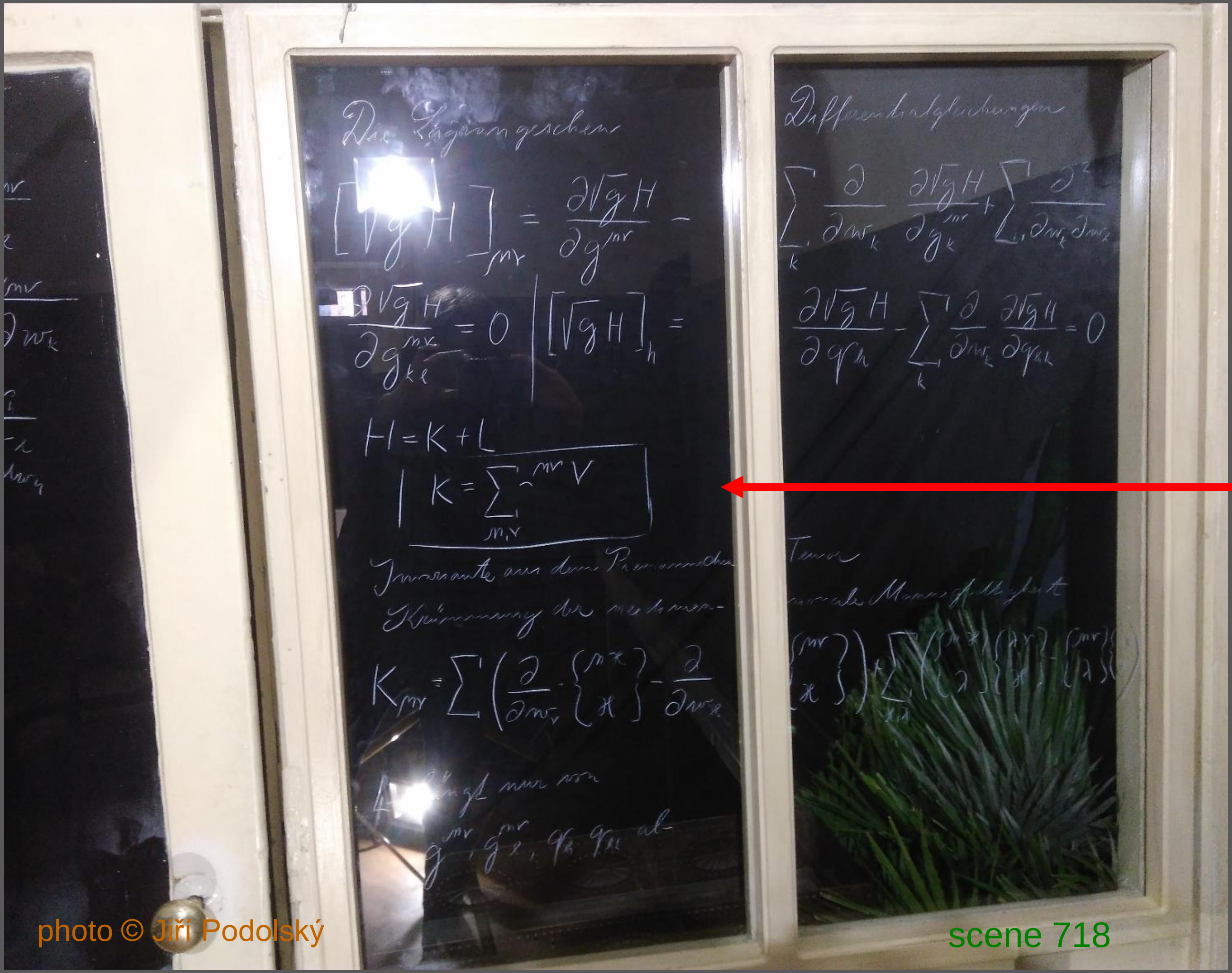
Genius.

NATIONAL GEOGRAPHIC

Hilbert, November 1915



Albert Einstein versus David Hilbert



Hilbert action, from which the Einstein's eqs. can be obtained by calculus of variations

20. 11. 1915, Hilbert

my template for the film

$$H = K + L$$

$$\boxed{K = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}}$$

Invariante aus dem Riemann

Krümmung der vierdimensionalen Man

$$K_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa} \left(\frac{\partial}{\partial w_\nu} \begin{Bmatrix} \mu\varkappa \\ \varkappa \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial w_\varkappa} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \varkappa \end{Bmatrix} \right) + \sum_{\varkappa,\lambda} \left(\begin{Bmatrix} \mu\varkappa \\ \lambda \end{Bmatrix} \right.$$

original paper p. 402

Was die Weltfunktion H betrifft, so sind, damit ihre Wahl eindeutig wird, noch weitere Axiome erforderlich. Sollen die Gravitationsgleichungen nur zweite Ableitungen der Potentiale $g^{\mu\nu}$ enthalten, so muß H die Gestalt haben

$$H = K + L$$

wo K die aus dem Riemannschen Tensor entspringende Invariante (Krümmung der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit)

$$K = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} K_{\mu\nu},$$

$$K_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa} \left(\frac{\partial}{\partial w_\nu} \begin{Bmatrix} \mu\varkappa \\ \varkappa \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial w_\varkappa} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \varkappa \end{Bmatrix} \right) + \sum_{\varkappa,\lambda} \left(\begin{Bmatrix} \mu\varkappa \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda\nu \\ \varkappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda\varkappa \\ \varkappa \end{Bmatrix} \right)$$

bedeutet und L nur von $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk} abhängt. Endlich machen wir im folgenden noch die vereinfachende Annahme, daß L nicht die $g_l^{\mu\nu}$ enthält.

p. 404

…lgemeinerten …sgleichungen (4) in dem oben angegebenen Sinne sind.

Unter Verwendung der vorhin eingeführten Bezeichnungsweise für die Variationsableitungen bezüglich der $g^{\mu\nu}$ erhalten die Gravitationsgleichungen wegen (20) die Gestalt

$$[\sqrt{g}\, K]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0. \tag{21}$$

Das erste Glied linker Hand wird

$$[\sqrt{g}\, K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\,(K_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} K g_{\mu\nu}),$$

this explicit form of Einstein’s equations was added by Hilbert in proofs…

„Einstein is the only creator of the physical theory of general relativity, together with Hilbert they have joint merit for the discovery of this fundamental equation“ (Abraham Pais)

the key test: deflection of light during the Solar Eclipse on May 29, 1919

IX. *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May* 29, 1919.

By Sir F. W. Dyson, *F.R.S., Astronomer Royal, Prof.* A. S. Eddington, *F.R.S., and Mr.* C. Davidson.

(*Communicated by the Joint Permanent Eclipse Committee.*)

Received October 30,—Read November 6, 1919.

[Plate 1.]

Contents.

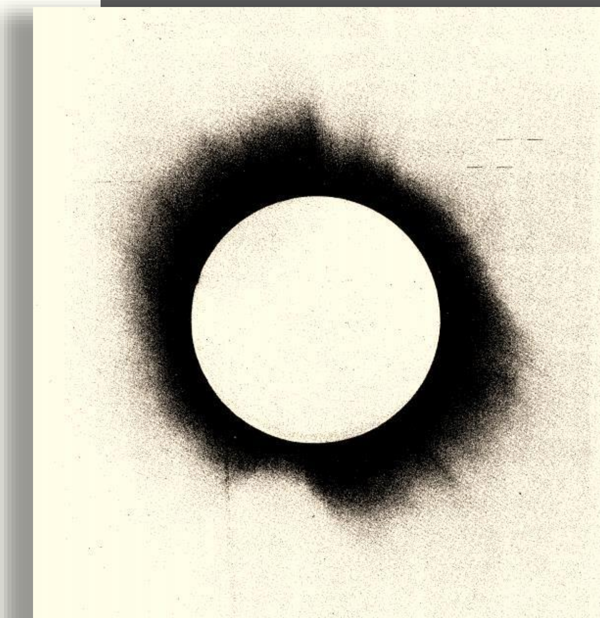
I. Purpose of the Expeditions.

1. The purpose of the expeditions was to determine what effect, if any, is produced by a gravitational field on the path of a ray of light traversing it. Apart from possible surprises, there appeared to be three alternatives, which it was especially desired to discriminate between—

(1) The path is uninfluenced by gravitation.

(2) The energy or mass of light is subject to gravitation in the same way as ordinary matter. If the law of gravitation is strictly the Newtonian law, this leads to an apparent displacement of a star close to the sun's limb amounting to $0''\cdot 87$ outwards.

(3) The course of a ray of light is in accordance with Einstein's generalised relativity theory. This leads to an apparent displacement of a star at the limb amounting to $1''\cdot 75$ outwards.



Genius.

NATIONAL GEOGRAPHIC

episode 10, scene 6

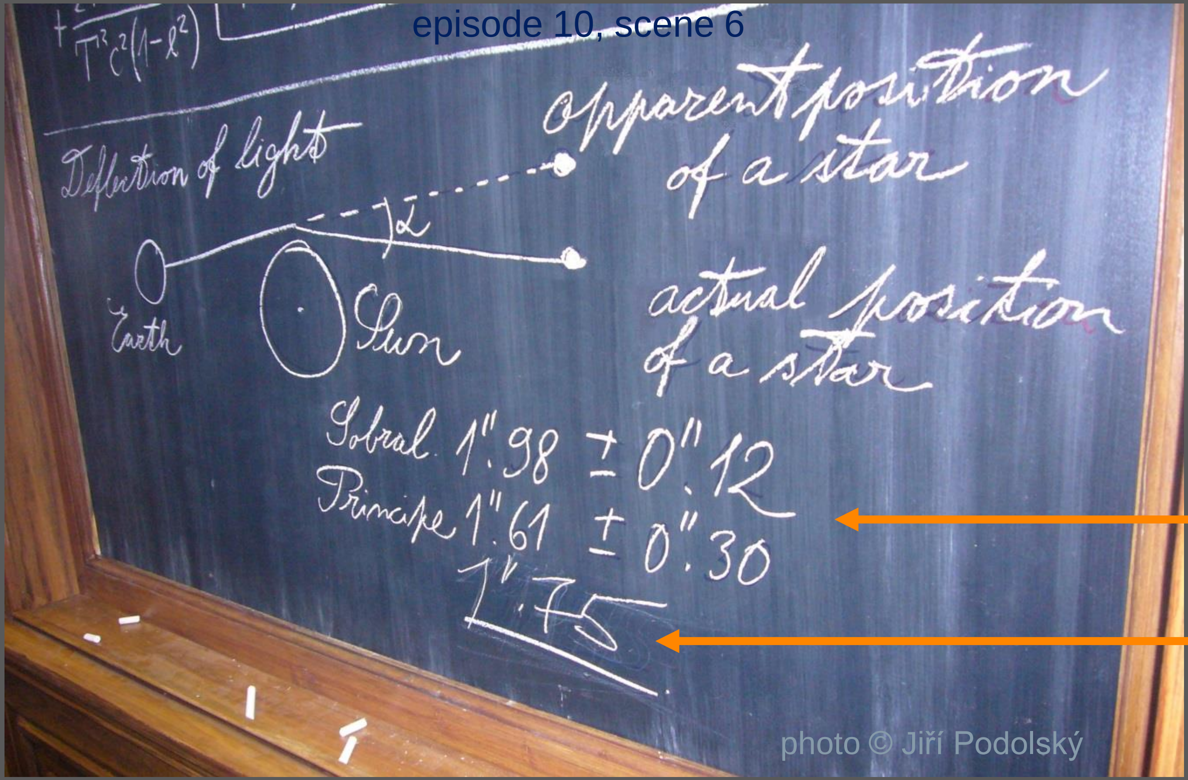


photo © Jiří Podolský

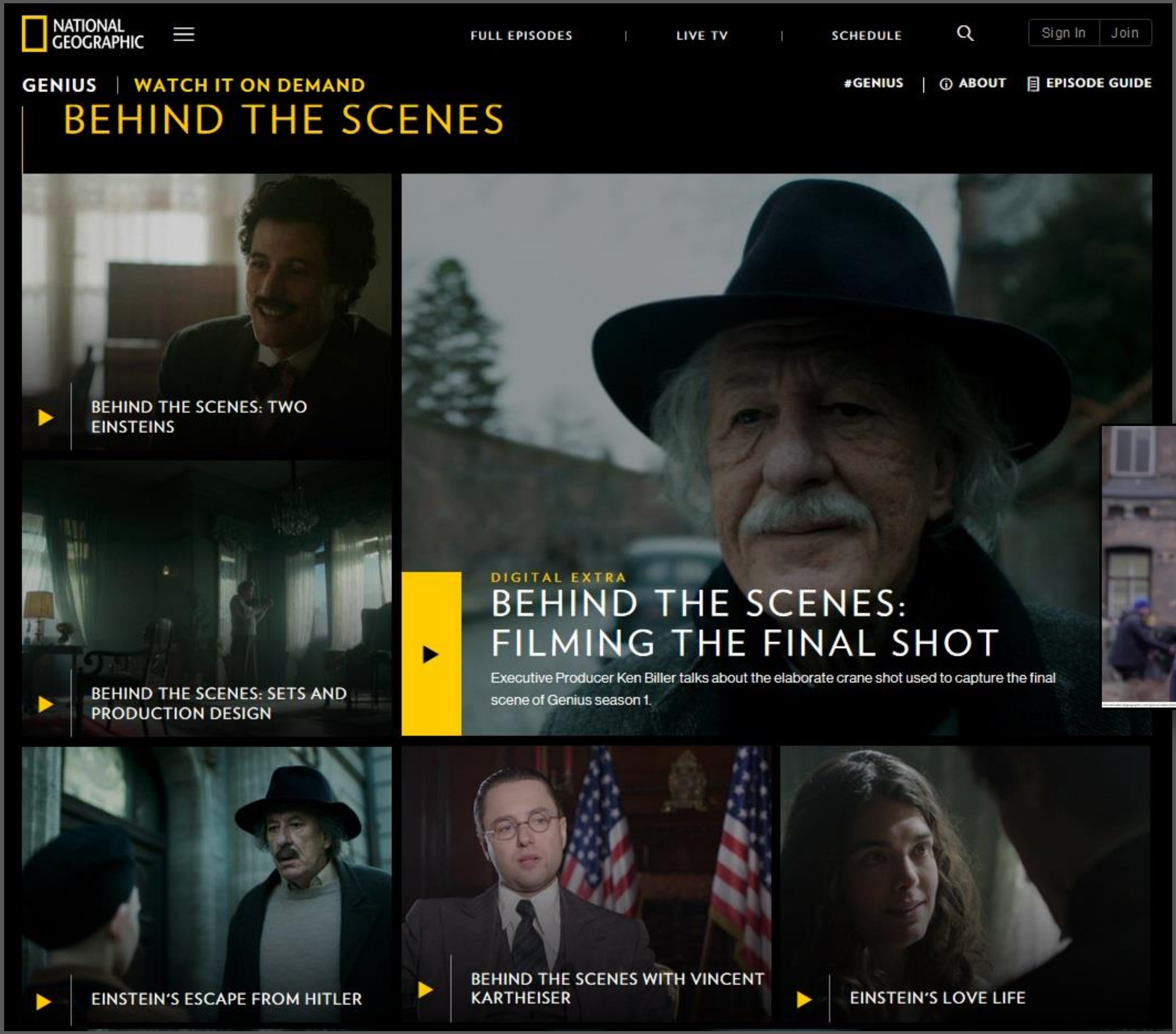
measurements 1919

theoretical prediction 1915

Genius.


photo © National Geographic, Dušan Martinček

the final shot of the whole series Genius



www page
22. 11. 2017

director, script writer and producer Kenneth Biller describes the final shot of the series

the final shot

camera on a long crane

the final shot

camera on a long crane

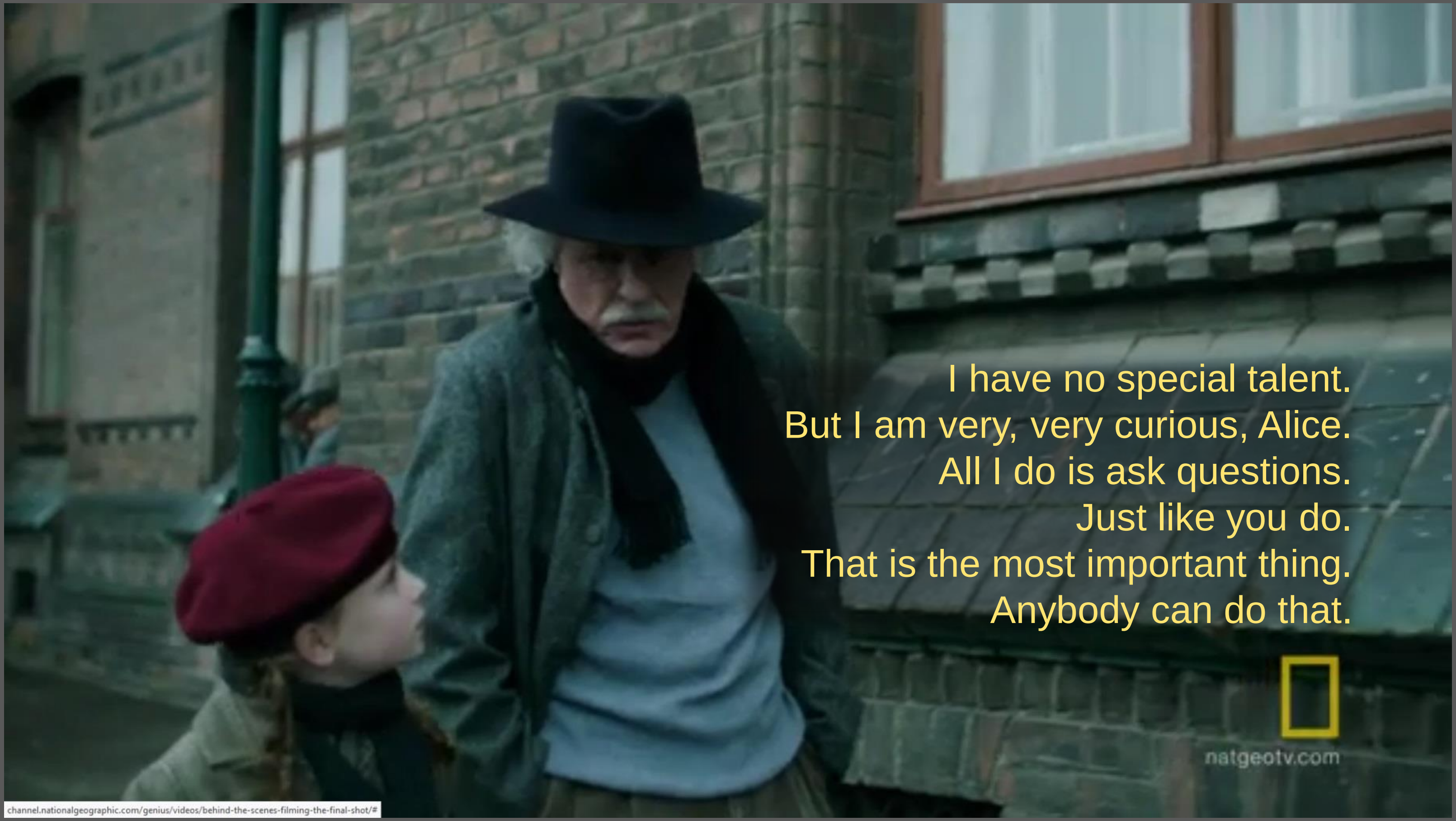
channel.nationalgeographic.com/genius/videos/behind-the-scenes-filming-the-final-shot/#

the final shot

Einstein with Alice walk on the Princeton campus and talk

the final shot

Einstein with Alice walk on the Princeton campus and talk



the final shot

Princeton, Einstein and Alice: final 30-seconds shot without a cut

the final shot

Princeton, Einstein and Alice: final 30-seconds shot without a cut

the final shot

Princeton, Einstein and Alice: final 30-seconds shot without a cut

the final shot

Princeton, Einstein and Alice: final 30-seconds shot without a cut

the final shot of the whole series Genius

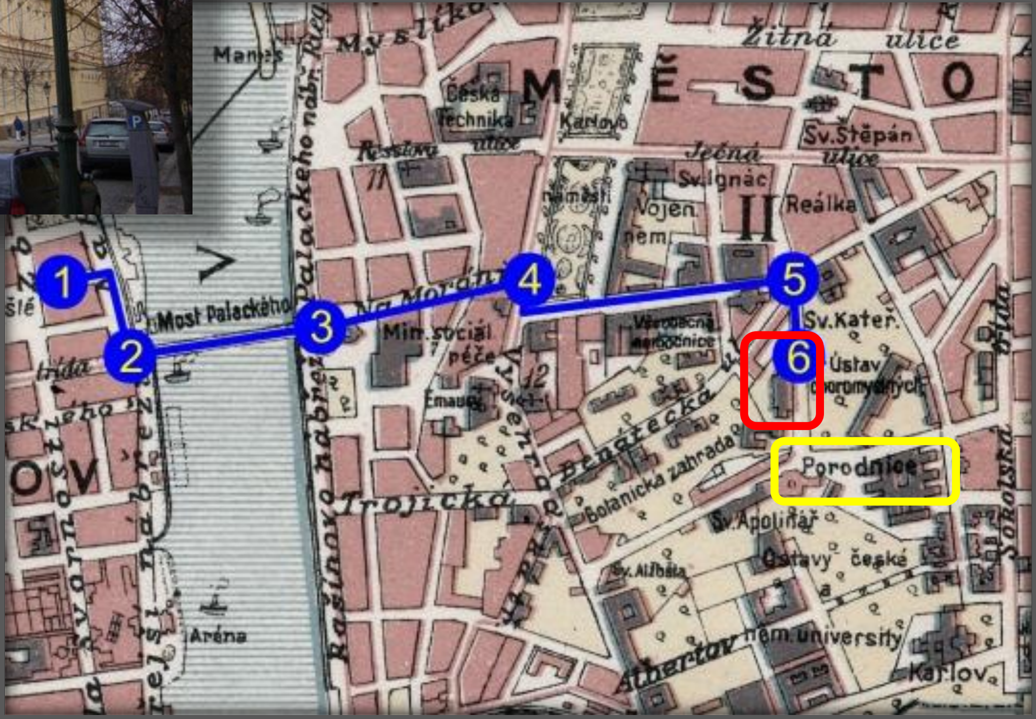
www page 22. 11. 2017

the final shot of the whole series Genius

only 100 meters from Einstein’s 1911-1912 office
at Prague University in Viničná Street !

channel.nationalgeographic.com/genius/videos/behind-the-scenes-filming-the-final-shot/#

Einstein's office, Viničná Street



filmed in Apolinářská Street,
maternity hospital as Princeton