# Od Newtona ke Keplerovi geometricky

Jiří Podolský

Už od základní školy všichni známe Newtonovy zákony mechaniky a od střední školy také Keplerovy zákony pohybu planet. Bez velké nadsázky lze říct, že tyto dvě trojice zákonů tvoří základní kameny fyzikálního poznání světa. Víme také, že sehrály klíčovou roli v historii přírodovědy. Zmíněné zákony – klenoucí se jako duchovní oblouk mezi počátkem a koncem 17. století — vymezují první úspěšný pokus v dějinách o matematické vystižení složitých dějů, které se odehrávají ve vesmíru. V jistém smyslu právě jimi lidstvo překročilo stín středověkých dogmat a vstoupilo do éry novověku, ve kterém rozum a racionalita přinesly své překvapivé a netušené plody.

## Připomenutí

V tomto příspěvku se chceme věnovat souvislosti mezi Keplerovými a Newtonovými zákony, a proto logicky začneme jejich stručným připomenutím (v dnešní „neškolometské“ formulaci).

### Keplerovy zákony: geometrie planetárních orbit

**K1** („elipsy“): *Planety se pohybují po elipsách v jejichž společném ohnisku je Slunce.*

**K2** („plochy“): *Spojnice Slunce a planety opíše za stejný čas vždy stejnou plochu.*

**K3** („$T^2 \sim R^3$“): *Druhá mocnina oběžné doby planety je úměrná třetí mocnině hlavní poloosy její trajektorie.*

První dva zákony byly Keplerem objeveny během jeho plodného pobytu v Praze a poprvé otištěny ve slavném díle *Astronomia nova* (Nová astronomie, 1609), třetí zákon objevil 15. 5. 1618 a publikoval o rok později v práci *Harmonice mundi* (Harmonie světa, 1619).

### Newtonovy zákony: dynamika pohybu

**N1** („setrvačnost“): *Těleso setrvává v klidu nebo rovnoměrně přímočarém pohybu, není-li nuceno vnějšími silami tento stav změnit.*

**N2** („zákon síly“): *Časová změna hybnosti hmotného bodu je (co do velikosti i směru) rovna působící síle,*
pro naše účely tedy platí vzorec $m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}$.

**N3** („akce a reakce“): *Tělesa na sebe působí stejně velkými silami opačného směru.*

K těmto základním zákonům mechaniky ještě připojíme významný „čtvrtý Newtonův zákon“, jímž je zákon všeobecné gravitace. Označme ho pro naše účely symbolem

**NG** („gravitační síla“): *Dvě tělesa hmotnosti $m_1$ a $m_2$ vzdálená $R$ se přitahují silou*

$$F = \kappa\frac{m_1 m_2}{R^2} \ ,$$

*která leží na spojnici obou těles.*

Gravitační zákon a jeho souvislost s Keplerovými zákony Newton poprvé prezentoval ve svém krátkém pojednání *De motu corporum in gyrum* (O pohybu těles po oběžných drahách, listopad 1684). Úplná verze pohybových zákonů a zákona gravitačního je pak vlastním obsahem jeho slavných *Principií*, tedy díla *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (Matematické základy přírodní filosofie, červenec 1687).

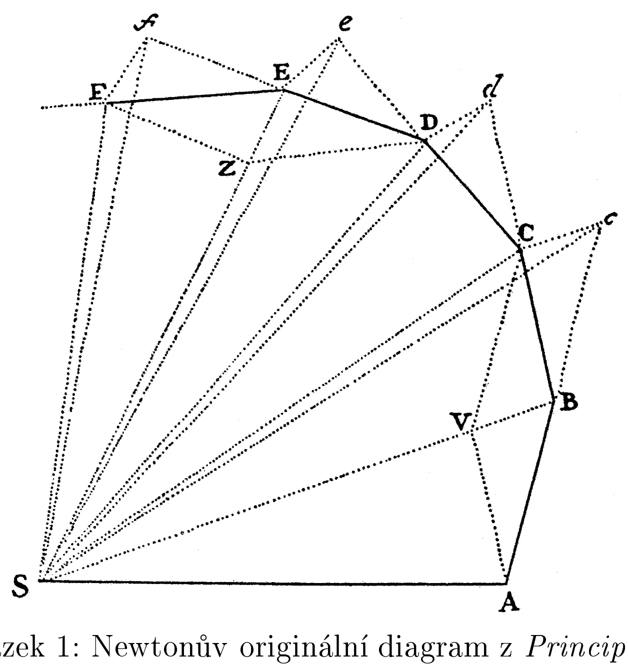
# Od Keplera k Newtonovi a nazpátek

Newtonův důvtipný postup fyzikálně-geometrických úvah, které vedou od Keplerových zákonů k zákonům dynamickým, je fascinující a v minulosti zaujal řadu lidí, mezi nimi i Feynmana. Ten 13. 3. 1964 proslovil na Caltechu přednášku právě na toto téma. Nebyla ovšem zařazena do jeho známého kurzu *Feynmanových přednášek z fyziky.* Feynmanovy stručné rukopisné poznámky se záhy „ztratily“, byly znovu objeveny až v roce 1992 v pracovně jeho bývalého spolupracovníka Leightona. Podařilo se je rekonstruovat a vydat knižně [1] (nedávno vyšel slovenský překlad [2]). Kniha vyvolala značný ohlas v odborných pedagogických časopisech [3, 4, 5, 6], záhy se objevil i český článek [7]. Náš příspěvek je inspirován právě zmíněnou knihou [1]. Přebíráme zde jak logiku argumentací, tak klíčové obrázky.

Postup, kterým zde ukážeme geometrickou souvislost Keplerových a Newtonových zákonů, lze rozdělit do dvou částí. V první nejprve z Keplerova druhého a třetího zákona odvodíme Newtonův gravitační zákon. Následně pak z Newtonových zákonů odvodíme Keplerův první zákon, čímž se ověří správnost Newtonovy teorie a její predikativní schopnost. Poutavá je především skutečnost, že posloupnost úvah do značné míry odpovídá historickému Newtonovu postupu.

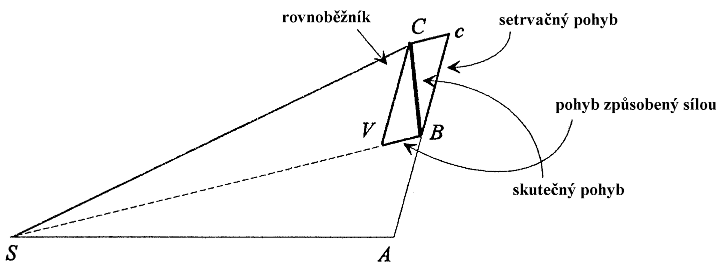
## K2 implikuje dostřednost gravitační síly

Ukážeme nejprve, že za předpokladu platnosti Newtonových dynamických zákonů N1-N3 je Keplerův zákon ploch K2 ekvivalentní skutečnosti, že gravitační síla působí vždy směrem ke Slunci. Newtonův postup spočívá v tom, že dráhu planety nejprve „diskretizujeme“, tedy spojitou trajektorii aproximuje na sebe navazujícími úsečkami, které planeta uběhne za stejné časové intervaly $\Delta t$, viz Obr. 1.




Obrázek 1: Newtonův originální diagram z *Principií.*

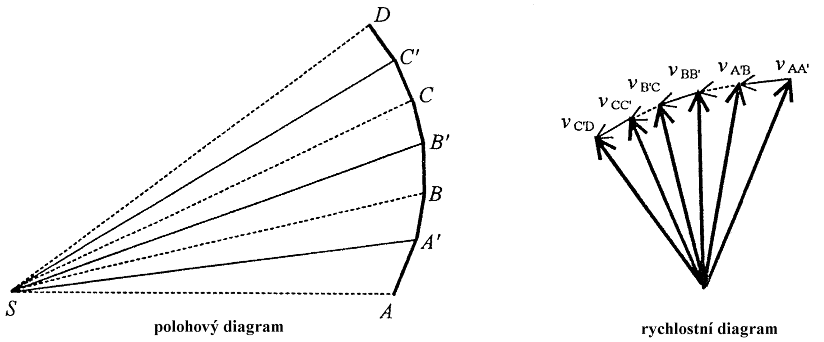
V nepřítomnosti Slunce by se planeta v souladu se zákonem setrvačnosti N1 pohybovala rovnoměrně přímočaře z bodu $A$ do bodu $B$ a pak dále za stejný čas z bodu $B$ do bodu $c$ (v detailu viz Obr. 2). Slunce umístěné v bodě $S$ však planetu gravitačně přitahuje k sobě, přičemž jeho působení můžeme soustředit do okamžiku, kdy se planeta nachází v bodě $B$. Protože gravitační síla je dostředná, bude v souladu s N2 zrychlení a tedy i změna rychlosti mířit na spojnici $BS$. Z prostého skládání rychlostí plyne, že planeta se nedostane do bodu $c$, ale do bodu $C$, přičemž úsečka $Cc$ je rovnoběžná s $BS$. To ale nutně implikuje, že plocha trojúhelníka $SAB$ je stejně velká jako plocha trojúhelníka $SBC$. Opravdu: Trojúhelník $SAB$ má stejnou plochu jako (na Obr. 2 nezakreslený) trojúhelník $SBc$ (poněvadž mají stejné základny $AB$ resp. $Bc$ a totožné výšky, neboť mají společný vrchol v $S$), a ten má zase stejnou plochu jako trojúhelník $SBC$ (neboť mají společnou základnu $SB$ a také stejnou výšku právě proto, že úsečka $Cc$ je rovnoběžná s $SB$). Stejný postup můžeme aplikovat i dále na úseku $CD$, jen s tím rozdílem, že síla nyní působí na spojnici $CS$, a podobně na všech následujících úsecích. Můžeme tedy shrnout, že dostřednost gravitační síly implikuje platnost zákona ploch. Protože pořadí výše uvedených argumentů můžeme snadno obrátit, lze také naopak odvodit, že *z Keplerova zákona K2 plyne fakt, že gravitační síla Slunce působí vždy centrálně*, tedy ve směru od planety ke Slunci.




Obrázek 2: Plocha trojúhelníka $SAB$ je stejně velká jako plocha trojúhelníka $SBC$.

## K3 implikuje ubývání gravitační síly se čtvercem vzdálenosti

Nyní je vhodné zavést pojem *rychlostního diagramu*. Zatímco obvyklý diagram znázorňuje závislost polohového vektoru $\vec{R}$ planety vůči Slunci na čase, rychlostní diagram (zvaný též hodograf) znázorňuje časový vývoj vektoru okamžité rychlosti $\vec{v}$, přičemž posloupnost vektorů $\vec{v}$ vykreslujeme vůči společnému počátku, viz Obr. 3.




Obrázek 3: Polohový diagram (vlevo) a odpovídající rychlostní diagram (vpravo).

Z pouhé kinematiky plyne, že rychlost je okamžitá změna polohy, a proto například vektor rychlosti $\vec{v}_{AA'}$ je rovnoběžný s úsečkou $AA'$ atd. Uvažme nyní speciální případ kruhové orbity. Představme si, že planeta obíhá po kružnici poloměru $R$, a to rovnoměrně konstantní rychlostí $v$. Rychlostní diagram proto bude také kružnice ovšem poloměru $v$. Když planeta oběhne Slunce právě jednou dokola, polohový vektor $\vec{R}$ opíše úplný kruh a vektor rychlosti v rychlostním diagramu také, a to za stejný čas oběhu $T$. Protože rychlost je změna polohy a zrychlení je změna rychlosti — a navíc jde o pohyb rovnoměrný — platí elementární vztahy $v = 2\pi R/T$ a $a = 2\pi v/T$, takže dosazením z první rovnice do druhé dostáváme $a = 4\pi^2 R/T^2$. Když nyní použijeme třetí Keplerův zákon $T^2 \sim R^3$, dostáváme ihned $a \sim R/R^3 = 1/R^2$. Podle N2 je ovšem síla $F$ úměrná zrychlení $a$, a tak *velikost gravitační síly ubývá s druhou mocninou vzdálenosti* planety od Slunce, $F \sim 1/R^2$.

Shrneme-li oba předchozí body, můžeme tedy uzavřít, že NG je ekvivalentní K2 a K3

## Finále: odvození K1 z Newtonových zákonů

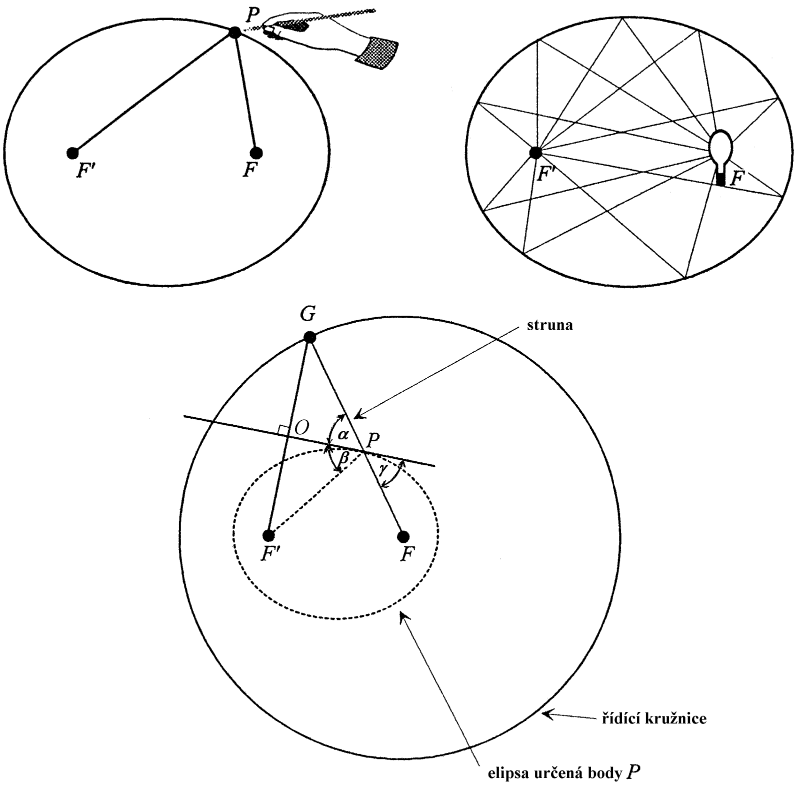
Dva Keplerovy zákony nám tedy umožnily nalézt správnou podobu zákona gravitační síly. Zbývá provést klíčový test, totiž ověřit, že z Newtonových zákonů mechaniky N1-N3 a z gravitačního zákona NG plyne také hlavní Keplerův zákon K1. Jinými slovy, zbývá odvodit, že dráha planety kolem Slunce je elipsa. Podobně jako v předchozích úvahách použijeme i zde výhradně geometrické argumenty.

### Geometrické konstrukce elipsy

Musíme pochopitelně začít tím, co to vlastně elipsa je a jak se dá zkonstruovat. Všichni známe ze školy, že elipsa je množina bodů, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou privilegovaných bodů — ohnisek, viz Obr. 4 vlevo nahoře. Další důležitou (avšak méně známou) charakteristikou elipsy je skutečnost, že každý paprsek vyslaný z jednoho ohniska se na eliptické křivce odrazí přesně do druhého ohniska. (Tento fakt známe v limitním případě: extrémně excentrická elipsa přechází v parabolu, jejíž druhé ohnisko leží v nekonečnu. Proto je rovnoběžný svazek paprsků parabolou soustředěn do jejího ohniska.)

Pro náš další výklad je ovšem nutné připomenout ještě další zajímavou geometrickou konstrukci elipsy. Ta nám navíc umožní podat elegantní důkaz platnosti obou výše zmíněných vlastností. Kolem bodu $F$ opišme tzv. *řídící kružnici* a uvnitř ní zvolme další bod $F'$, jak je znázorněno na Obr. 4 dole. Spojme oba body s libovolným bodem $G$ na ležícím na kružnici. Průsečík osy úsečky $GF'$ s úsečkou $GF$ je bod $P$, který leží na elipse. Provedeme-li tuto konstrukci pro každý bod $G$ na řídící kružnici, opravdu dostaneme elipsu s ohnisky $F$ a $F'$.

Tuto skutečnost snadno dokážeme. Trojúhelníky $GOP$ a $F'OP$ jsou zjevné identické, takže i strany $PG$ a $PF'$ jsou stejně dlouhé. Součet vzdáleností $FP + PF'$ je roven $FP + PG$, což je konstanta rovná poloměru kružnice. Body P odpovídající všem bodům $G$ na řídící kružnici tedy leží na elipse. Nyní dokážeme také druhou vlatnost, trotiž že světlo vyslané z ohniska $F$ se nutně odrazí do ohniska $F'$. Ze shodnosti trojúhelníků $GOP$ a $F'OP$ plyne, že úhel $\alpha$ je roven úhlu $\beta$. Dále zjevně platí, že úhel $\alpha$ je roven úhlu $\gamma$. Je tedy jasné, že $\beta = \gamma$, což je právě hledaný zákon odrazu. Stačí pouze dokázat, že osa $OP$ úsečky $GF'$ je *tečna* k elipse v bodě $P$. To je ovšem snadné: vezmeme-li kterýkoli jiný bod na této ose, evidentně bude (opět díky shodnosti



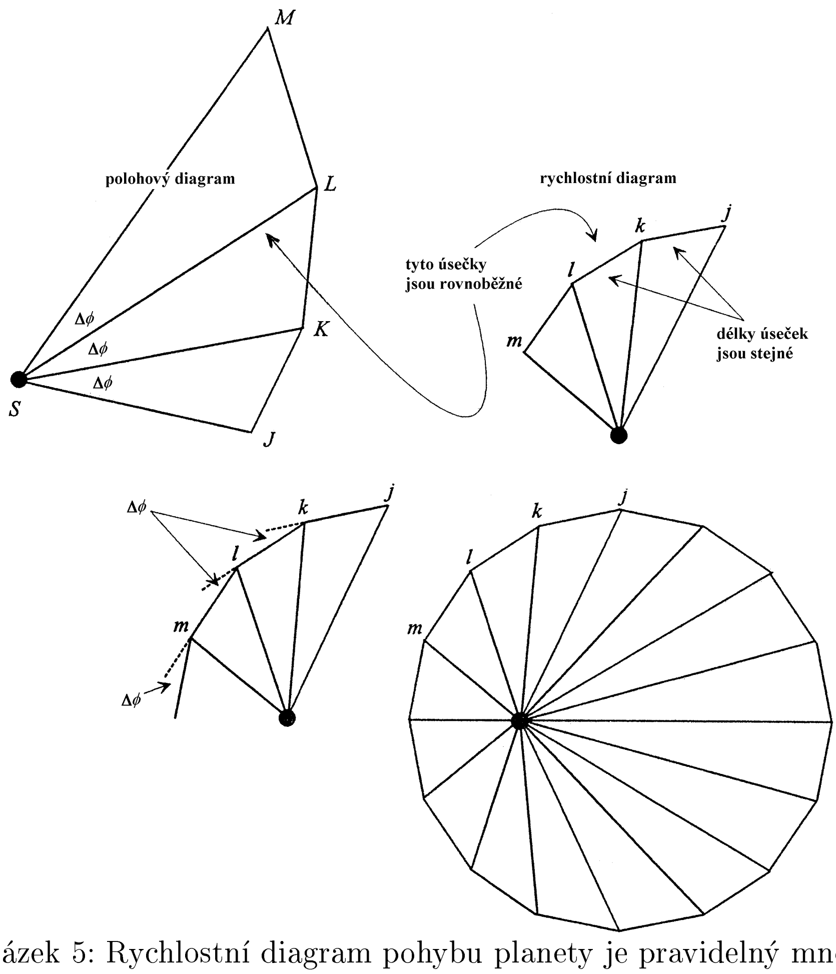

Obrázek 4: Obě hlavní vlastnosti elipsy (nahoře) lze dokázat pomocí konstrukce zobrazené na spodním diagramu a vysvětlené v textu.

příslušných trojúhelníků) součet jeho vzdáleností od ohnisek *větší* než $FP+PG$, což je poloměr kružnice. Každý takový bod proto musí ležet *vně* elipsy, takže osa úsečky $GF'$ je opravdu tečna.

### Rychlostní diagram planety

Po této krátké geometrické předehře se můžeme vrátit k naší fyzikální úloze, totiž odvození Keplerova zákona K1. Celou dráhu planety kolem Slunce, jež leží v bodě $S$, rozdělíme na *pevně daný počet* úseků takových, že *jejich středové úhly jsou všechny stejné* a mají konstantní hodnotu $\Delta\phi$, viz Obr. 5 vlevo nahoře. Podle zákona ploch K2 proletí planeta příslušný úsek dráhy za čas $\Delta t$, který je přibližně (v limitě $\Delta\phi \to 0$ pak přesně) úměrný ploše příslušného trojúhelníka, tedy $\Delta t \sim \Delta S \sim R^2\Delta\Phi \sim R^2$, kde $R$ je (průměrná) vzdálenost planety od Slunce na daném úseku.

Uvažme nyní, jaká je změna rychlosti $\Delta\vec{v}$ na těchto úsecích. Podle Newtonova pohybového zákona N2 je změna hybnosti rovna působící síle co do směru i velikosti, takže $\Delta\vec{v} \sim \vec{F}\Delta t$. Změna *velikosti* rychlosti $\Delta v$ je tedy úměrná $F\Delta t$, přičemž $\Delta t \sim R^2$, zatímco podle NG je $F \sim 1/R^2$, takže $\Delta v$ *je na všech úsecích vymezených* $\Delta\phi$ *stejná.* Pokud jde o *směr* změny rychlosti $\Delta\vec{v}$, je podle NG přesně dostředný, tedy působí *ve směru okamžité spojnice* $\vec{R}$ *Slunce a planety.* Z těchto informaci již snadno odvodíme, že rychlostní diagram pohybu planety musí být *pravidelným mnohoúhelníkem*, viz Obr. 5 vpravo dole. Změna velikosti

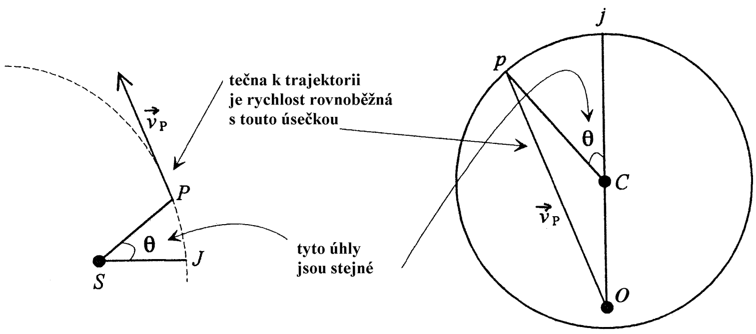



Obrázek 5: Rychlostní diagram pohybu planety je pravidelný mnohoúhelník, ve spojité limitě pak kružnice.

rychlosti $\Delta v$ je totiž na každém úseku rychlostního diagramu stejná, takže úsečky $jk$, $kl$, $lm$ atd. mají stejnou délku. Navíc směry těchto úseček odpovídají směrům $\Delta\vec{v}$, která jsou rovnoběžné se směry $\vec{R}$, tedy úsečkami $KS$, $LS$, $MS$ atd. v polohovém diagramu. Tyto směry jsou ovšem vzájemně otočené vždy o konstantní úhel $\Delta\phi$. Rychlostní diagram je tedy pravidelný mnohoúhelník. Ve spojité limitě $\Delta\phi \to 0$ se *rychlostní diagram stává kružnicí.* To je docela překvapivá skutečnost!

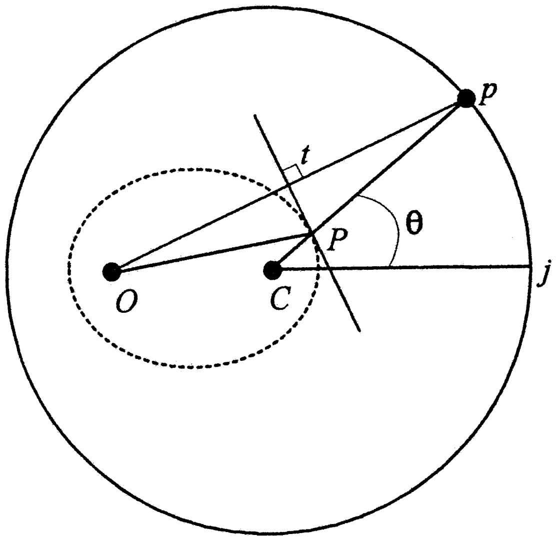
### Vlastní důkaz

Dospěli jsme tedy k obrázku znázorněném na Obr. 6. Nechť se planeta při svém pohybu kolem Slunce dostala do bodu $P$, který svírá s periheliem v bodě $J$ úhel $\theta$. Její okamžitou rychlost $\vec{v}_P$ můžeme zjistit v rychlostním diagrmu, jenž má podobu kružnice. Stanovíme bod $p$, aby úhel určený body $pCj$ byl právě $\theta$. Spojnice excentrického bodu $O$ a bodu $p$ v rychlostním diagramu pak určuje okamžitou rychlost planety $\vec{v}_P$ (co do směru i velikosti), která je tečnou k trajektorii.




Obrázek 6: Poloha planety a odpovídající rychlost jejího pohybu.

Nyní stačí provést poslední elegantní trik: *otočme rychlostní diagram o 90 stupňů* ve směru hodinových ručiček a vykresleme ho do stejného obrázku, v němž znázorňujeme trajektorii planety (ztotožníme body $C$ a $S$). Dostaneme tím Obr. 7. Oba úhly $\theta$ v polohovém i otočeném rychlostním diagramu splynuly. Nyní stačí si jen uvědomit, že *rychlostní diagram se stal řídící kružicí pro konstrukci eliptické trajektorie*! Opravdu: *osa* úsečky $Op$ v *otočeném* rychlostním diagramu určuje okamžitou rychlost, která je tečnou k trajektorii planety v bodě $P$. Jak jsme ale již dříve ukázali, takto zkonstruovaný bod $P$ musí ležet na elipse, a to pro každou hodnotu úhlu $\theta$.




Obrázek 7: Rychlostní diagram planety otočený o 90 stupňů kreslený do stejného obrázku jako diagram polohy ukazuje, že trajektorie planety musí být elipsa, protože osa přímky $Op$ určující směr okamžité rychlosti je tečnou k elipse v bodě $P$ (srovnej s Obr. 4).

Tím jsme dokázali, že trajektorií planety v gravitačním poli Slunce popsaném Newtonovými zákony je opravdu elipsa. I první Keplerův zákon je tedy důsledkem zákonů Newtonových.

# Reference

[1] D. L. Goodstein and J. R. Goodstein: *Feynman's lost lecture*, Norton, New York, 1996 a 1999.

[2] slovenský překlad knihy [1]: J. Hanč and S. Tuleja, *Feynmanova stratená prednáška*, Enigma, Nitra, 2001. Viz též webové stránky `www.lostlecture.host.sk`

[3] S. K. Stein: Exactly how did Newton deal with his planets?, *The Mathematical Intelligencer* **18** (1996) 7–11.

[4] A. Gonzáles-Villanueva *et al*: From circular paths to elliptic orbits: a geometric approach to Kepler's motion, *Eur. J. Phys.* **19** (1998) 431–438.

[5] E. I. Butikov: The velocity hodograph for an arbitrary Keplerian motion, *Eur. J. Phys.* **21** (2000) 297–302.

[6] D. Debres: Reinventing the wheel: Hodographic solutions to the Kepler problems, *Am. J. Phys.* **69** (2001) 481–489.

[7] J. Kuběna: O Newtonových a Keplerových zákonech, aneb jak asi Newton na své zákony přišel, *Matematika-fyzika-informatika* **7** (1997/98) 409–416, 472–482.