Cvičení z Aplikované matematiky IV

1. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce
$$f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}\ ,\ a > 0$$
NÁVOD: Viz. postup na druhé stránce poznámek k Fourierově transformaci. Pro vyhodnocení integrálu $A(0)$ použijte následující trik
$$[A(0)]^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2-ay^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-a\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$$

2. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce
$$f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}, \quad a > 0$$
NÁVOD: Uvědomte si, že kvůli $|x|$ je vhodné integraci ve Fourierově transformaci rozdělit na $\int_{-\infty}^{0}$ a $\int_0^{\infty}$. Následně už můžete přímočaře spočítat tyto integrály pomocí jednoduché substituce, neboť jde o integrály exponenciál.

3. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce
$$f(x) = \frac{1}{|x|^2 + b^2}\ ,\ x \in \mathbb{R}^3, b \in \mathbb{R}, b > 0$$
NÁVOD: Zadaná funkce je sféricky symetrická, tedy máme $f(x) = R(r) = \frac{1}{r^2+b^2}$ a pro takovou funkci lze Fourierovu transformaci spočíst pomocí věty 19.2 poznámek k přednášce. To vede na integrál typu
$$\int_0^{\infty} \frac{r\sin(ar)}{r^2+b^2}\mathrm{d}r$$
který lze spočíst pomocí reziduové věty použitím 3. metody. Všimněte si, že integrál je sudá funkce a integraci lze tedy rozšířit na celé $\mathbb{R}$.

4. Pomocí Fourierovy transformace spočtěte partikulární řešení rovnice
$$y'' - k^2 y = \chi_{\langle -1,1\rangle}(x)$$
NÁVOD: Aplikujte Fourierovu transformaci na celou rovnici a uvědomte si, že podle věty 19.8 platí $\widehat{y''} = -4\pi^2\xi^2\hat{y}$ a pro pravou stranu použijte výsledky cvičení za větou 19.3 poznámek. Vyjádřete $\hat{y}$ a spočítejte inverzní Fourierovu transformaci použitím reziduové věty.