Cvičení z Aplikované matematiky IV

1. Určete Laurentovu řadu v okolí nuly a mezikruží konvergence

$$\frac{\sin z}{z^2}$$

Návod: Laurentova řada je zobecnění Taylorovy řady obsahující i členy se zápornými mocninami. Komplexní sinus je funkce definovaná svým Taylorovým rozvojem, tedy v Taylorově rozvoji pro sinus pouze nahradíme reálné x komplexním z. Následně už stačí rozvoj vydělit podle vzorce výše. Pro určení mezikruží je podstatné chování blízko bodu, okolo kterého řadu konstruujeme, a zároveň pro vnější hranici mezikruží je podstatné chování daleko. Mezikruží konvergence $K_{r,R}(z_0)$ lze pro Laurentovu řadu $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ stanovit na základě následujících vztahů

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

V našem případě je použití druhého vzorce jednoduché, protože záporná část zadané řady má konečně mnoho členů. Netriviální je pouze stanovení R, ale tento vzorec je shodný s poloměrem konvergence mocniných řad probíraných v minulém semestru.

2. Rozviňte funkci

$$\frac{1}{(z-2)^2}$$

do Laurentovy řady se středem v

$$\text{a)}\quad z = 2 \qquad \text{b)}\quad z = 0 \qquad \text{c)}\quad z = \infty$$

Návod: Případ a) je triviální s ohledem na tvar funkce. Ostatní dva případy vyřešte po prozkoumání řešeného příkladu 4.B z přiložené kapitoly Kopáčkových skript.