Cvičení z Aplikované matematiky IV

1.4.2020

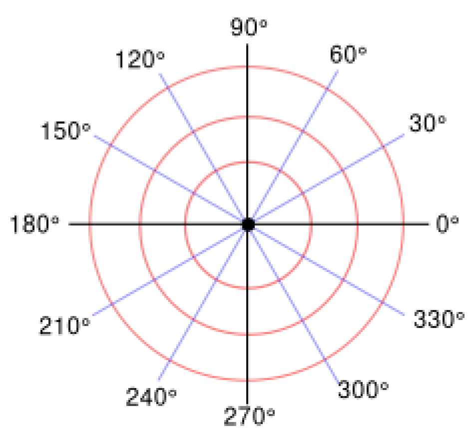
1. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{17}$$

   NÁVOD: Zadání je typu z^{17}. Převeďte komplexní číslo do polárního tvaru $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\phi}$. Tedy určete velikost komplexního čísla $\rho = \sqrt{z\bar{z}}$ a argument ϕ. Následně použijte Moivreovu větu $z^{17} = \rho^{17}\mathrm{e}^{i17\phi}$ a výsledný výraz pokud možno zjednodušte.

2. Co se děje s komplexní rovinou při zobrazení $w = z^2$.

   NÁVOD: Uvažujte znovu $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\phi}$ a umocněte. Nakreslete si souřadnicovou síť v polárních souřadnicích



   a uvědomte si, co se děje při zobrazení se souřadnicovými čarami $\rho = konst.$ a $\phi = konst.$. Nakreslete nebo popište výsledek.

3. Najděte obraz kartézské souřadnicové sítě při zobrazení $w = \mathrm{e}^z$.

   NÁVOD: V tomto případě uvažujte komplexní číslo v kartézském tvaru $z = x+iy$. Proveďte exponenciálu takto zapsaného čísla a uvědomte si, že výsledkem je nějaké komplexní číslo zapsané v polárním tvaru. Poté už je jasné, jak se zobrazí souřadnicové čáry $x = konst.$ a $y = konst.$.

4. Najděte nutné a postačující podmínky na konstanty $a, b, c \in \mathbb{R}$ aby následující funkce byla holomorfní

$$f(z) = x + ay + i(bx + cy)$$

   NÁVOD: Holomorfní je funkce, která má komplexní derivaci. Podle věty 3.1 z poznámek k přednášce je nutnou i postačující podmínkou splnění Cauchyho-Riemannových podmínek (rovnice (2) poznámek). Zadání je zjevně tvaru $f = f_1+if_2$, takže odpověď obdržíte přímočarým použitím Cauchyho-Riemannových podmínek.