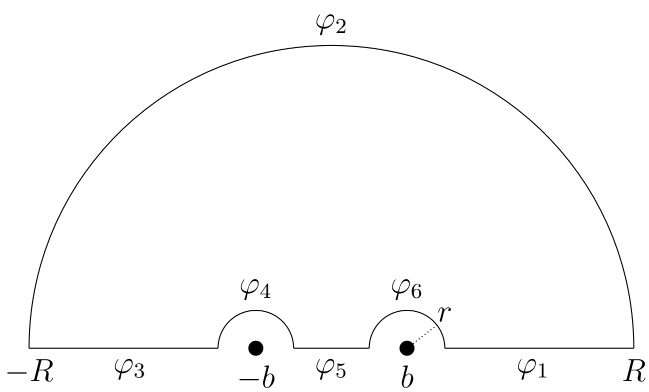
Cvičení z Aplikované matematiky IV

Pomocí reziduové věty spočtěte

1.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 - b^2} \, \mathrm{d}x \qquad a, b > 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(jako hlavní hodnotu - v.p.)

NÁVOD: Znovu si zavedeme $\sin(ax) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{iax})$ a budeme tedy pracovat s integrandem $\frac{z\,\mathrm{e}^{iax}}{z^2-b^2}$. Ten sice splňuje předpoklad o stupních polynomů v čitateli a jmenovateli, ale má póly v $\pm b$, tedy na integrační cestě (viz. 3. metoda použití reziduové věty). Jde o příklad podobný 4.příkladu z minulého cvičení a také příkladu 4.L Kopáčkových skript. Integrační cesta je v tomto případě následující



Jelikož integrand nemá žádné singularity uvnitř integrační cesty, platí podle reziduové věty schematicky

$$\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} + \int_{\varphi_5} + \int_{\varphi_6} = 0$$

Pro vymizení integrálu podél křivky φ_2 stačí použít Lemma 18.16 z poznámek k přednášce. Výpočet integrálu podél φ_4 a φ_6 probíhá použitím Lemmatu 18.17. Hledaný integrál je limitou integrálů přes zbylé úseky cesty, tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 - b^2} \, \mathrm{d}x = \mathrm{Im} \left[\lim_{\substack{r \to 0 \\ R \to \infty}} \left(\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_5} \right) \frac{z\,\mathrm{e}^{iax}}{z^2 - b^2} \right] = -\mathrm{Im} \left[\lim_{r \to 0} \left(\int_{\varphi_4} + \int_{\varphi_6} \right) \frac{z\,\mathrm{e}^{iax}}{z^2 - b^2} \right]$$

2. Fresnelův integrál (optika)

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$$

NÁVOD: Integrací po kruhové výseči podle návodu na následující straně.

3. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{\sinh(x)} \,\mathrm{d}x$$

NÁVOD: Příklad je obdobný úloze 4.M z Kopáčkových skript po zavedení $\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Hlavní problém spočívá ve vyřešení rovnice $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{-z}$ — pomůže vzpomenout si na analýzu zobrazení e^z. Pól integrandu už nebude ve stejném místě jako u příkladu 4.M, ale integrační obdélník můžeme použít stejný (až na obcházení pólu), protože máme sudou funkci.

Příklad 3.M. Vypočtěte *Fresnelovy integrály*

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx,\ \int_0^\infty \sin x^2\,dx.$$[11]

Řešení. Předně si všimneme, že tyto integrály jsou rovny reálné resp. imaginární části integrálu $\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx$, tj. integrálu $\int_\varphi e^{iz^2}\,dz$, kde φ je kladná reálná poloosa. Integrujme tedy funkci e^{iz^2} přes kladně orientovaný obvod kruhové výseče $0 \le |z| \le R$, $0 \le \arg z \le \pi/4$ (což dá nulu podle Cauchyovy věty) a proveďme limitní přechod pro $R \to \infty$. Integrál přes osu 1. kvadrantu je roven $-\frac{1+i}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = (1+i)\sqrt{\pi}/2\sqrt{2}$. Ukážeme, že integrál přes oblouk kružnice ψ_R konverguje k nule pro $R \to \infty$. Je

$$\int_{\psi_R} e^{iz^2}\,dz = \int_0^{\pi/4} e^{(Re^{it})^2} Rie^{it} =$$

$$= \int_0^{\pi/4} e^{(\cos^2 t - \sin^2 t + 2i\sin t\cos t)} Rie^{it}\,dt.$$

Tento integrál je v absolutní hodnotě menší nebo roven integrálu z absolutní hodnoty $\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2t} R\,dt$. Použijeme-li odhad $\sin\alpha \ge 2\alpha/\pi$, který platí pro $\alpha \in \langle 0, \pi/2\rangle$, dostaneme

$$\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2t} R\,dt \le \int_0^{\pi/4} e^{-R^4 t/\pi} R\,dt = \left[-\frac{\pi}{4R^2} e^{-4R^2 t/\pi}\right]_0^{\pi/4} \to 0$$

pro $R \to \infty$.

Konečně tedy dostáváme

$$\int_0^\infty (\cos x^2 + i\sin x^2)\,dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Porovnáním reálné a imaginární části dostáváme

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Podobným způsobem, jako jsme dokázali konvergenci k nule integrálu přes oblouk kružnice se dokazuje následující užitečné tvrzení:

[11] jako zobecněné integrály ve smyslu $\lim_{R\to\infty}\int_0^R$.