Cvičení z Aplikované matematiky IV

Pomocí reziduové věty ověřte:

1.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{13+12\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{5}$$

NÁVOD: Jde o typ 1. z přehledu použití reziduové věty k výpočtům integrálů. Ukázka celého výpočtu integrálů podobného typu je v příkladu 4.N v Kopáčkově sbírce. Základem je následující úprava

$$\frac{1}{13+12\sin x} \to \frac{1}{13+12\cdot\frac{1}{2i}(z-1/z)} = \frac{z}{13z-6iz^2+6i}$$

podle návodu je tedy integrál dán

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{13+12\sin x}\,\mathrm{d}x &= 2\pi \sum_{z_k\in K_1(0)} Res_{z_k}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{z}{13z-6iz^2+6i}\right)\\ &= 2\pi \sum_{z_k\in K_1(0)} Res_{z_k}\left(\frac{1}{13z-6iz^2+6i}\right)\end{aligned}$$

Stačí tedy nalézt kořeny jmenovatele, rozhodnout, které z nich leží uvnitř jednotkové kružnice a spočíst odpovídající rezidua. V tomto případě budou kořeny dva a to různé, tedy jmenovatel bude mít podobu $(z-z_1)(z-z_2)$ a pro výpočet reziduí lze užít způsob 3. ve větě 18.14

$$Res_{z_1}\left(\frac{1}{13z-6iz^2+6i}\right) = \left(\frac{1}{[13z-6iz^2+6i]'}\right)\Bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{13-12iz_1}$$

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}$$

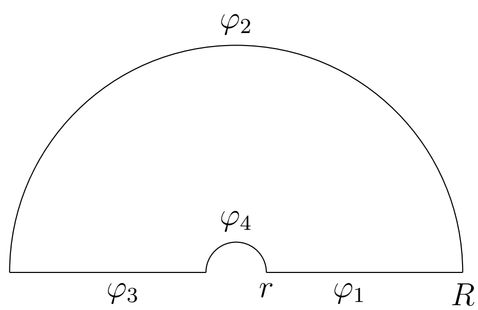
NÁVOD: Jde o typ 2. z přehledu použití reziduové věty k výpočtům integrálů. Ukázka celého výpočtu je v příkladu 4.F v Kopáčkově sbírce. Podle návodu k výpočtu musíte ověřit, zda stupně polynomů v čitateli a jmenovateli splňují požadovaný vztah. Následně nalezněte řešení rovnice $z^6 = -1$ a nakreslete si, kde se v komplexní rovině nacházejí a uvědomte si, že žádné z nich není reálné (další požadavek použité metody). Vyberte ta řešení, která se nacházejí v horní polorovině a spočtěte odpovídající rezidua.

3.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i \xi x}}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \pi \mathrm{e}^{-2\pi\xi}$$

NÁVOD: Jde o typ 3. z přehledu použití reziduové věty k výpočtům integrálů. Ukázka výpočtu podobné úlohy je v příkladu 4.H v Kopáčkově sbírce, ovšem v našem případě nebereme reálnou část výsledku, neboť máme ve jmenovateli celou exponenciálu a ne pouze kosinus. Znovu ověřte předpoklady metody a nalezněte kořen jmenovatele ležící v horní polorovině. Následně už jen stačí spočíst reziduum pomocí způsobu 3. ve větě 18.14.

4.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

NÁVOD: Jde o typ úlohy, která vypadá jako typ 3. z přehledu použití reziduové věty k výpočtům integrálů, ale nesplňuje podmínku absence singularit na reálné ose. Ukázka celého výpočtu je v příkladu 4.F v Kopáčkově sbírce, přičemž popsané křivky vypadají v komplexní rovině následovně



Pro vymizení integrálu podél křivky φ_2 stačí použít Lemma 18.16 z poznámek k přednášce, podobně jako u předchozího příkladu. Výpočet integrálu podél φ_4 probíhá použitím Lemmatu 18.17.