Klasická elektrodynamika – Náměty na cvičení II

Ampérův zákon

Magnetické pole v koaxiálním vedení s objemovou proudovou hustotou ve vnitřním vodiči a plošnou ve vnějším.

Vektorový potenciál

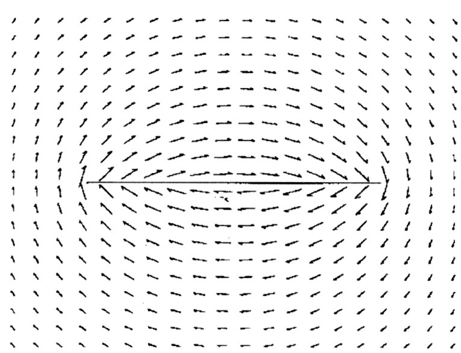
Pro stejnou úlohu nalézt vektorový potenciál.
Vektorový potenciál homogenního pole. Výpočet magnetického toku s použitím Stokesovy věty a vektorového potenciálu.

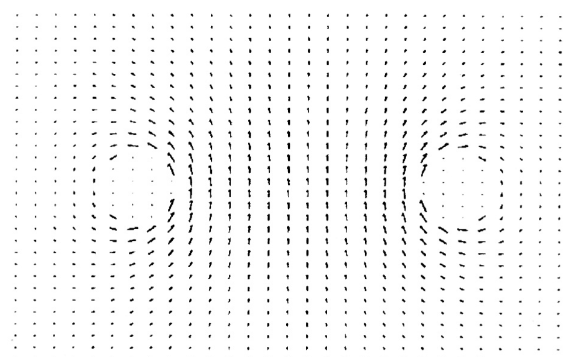
Indukčnost

V případě, že proud ve vnitřním vodiči teče pouze po povrchu (časem dá skinový jev) nalézt energii pole a indukčnost vedení na konci zkratovaného.

Přímá integrace - Biot-Savart

Placatý nekonečně dlouhý přímý vodič s rovnoměrnou plošnou proudovou hustotou.

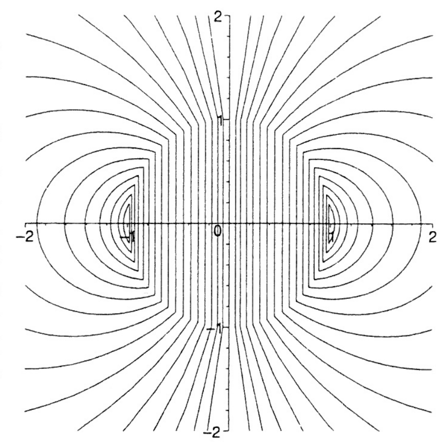




Kruhový vodič. Zkusit spočíst všude, integrály spočíst na ose.
Solenoid na ose.

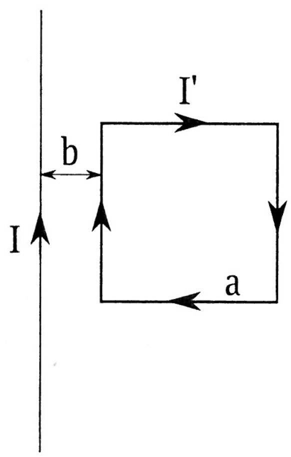
Příklady ke cvičení z Klasické elektrodynamiky

Magnetická pole v materiálu



1. Nalezněte pole $\vec{B}$ a $\vec{H}$ jaká budí permanentní magnet ve tvaru koule vyrobený z dokonale magneticky tvrdého materiálu s konstantní magnetizací $\vec{M}$ rovnoběžnou s osou z.
Návod: 1. Protože magnetický objekt budí v prvním přiblížení dipólové pole předpokládejte, že symetrie problému dá vnější pole přesně dipólové. 2. Na základě pozorování, že zdroj magnetické intenzity má zřídlovou povahu uhodněte, že pole uvnitř je homogenní, protože pak lze psát $\vec{H} = \nabla\psi$ a na základě zkušenosti z elektrostatiky víme, že dipólové a homogenní pole mají stejnou úhlovou závislost potenciálu a ten tak lze spojitě navázat. 3. Ukažte, že povrchu koule lze opravdu splnit podmínky Div $\vec{B} = 0$, Rot $\vec{H} = 0$, když uvnitř vezmete pole homogenní a vně pole dipólové. 4. Ukažte, že tyto podmínky dají dipólový moment koule rovný součinu objemu koule a magnetizace a že uvnitř je $\vec{H} = -\vec{M}/3$ a $\vec{B} = +\vec{2}M/3$.

Magnetické síly



2. Nalezněte sílu, jíž na sebe působí čtvercová smyčka o straně a a přímý nekonečně dlouhý vodič ležící v rovině syčky, protékají-li jimi proudy dle obrázku.
1. Sílu spočtěte z Lorentzovy síly na nosiče náboje ve čtvercové smyčce.
2. Sílu určte na základě přiblížení $a << b$, kdy lze čtvercovou smyčku považovat za dipól.

Elektromagnetická indukce

3. Spočtěte jak velký proud I' se indukuje uvnitř čtvercové smyčky, mění-li se proud je-li proud I v závislosti na čase. Předpokládejte, že odpor kruhové smyčky je zanedbatelný, tedy že relaxační doba je mnohem delší, než (například) period proudu I. Vlastní indukčnost čtvercové smyčky $L = f\mu_0 a$, kde f je faktor, řekněme 3, závislý na tloušťce drátu smyčky atp.

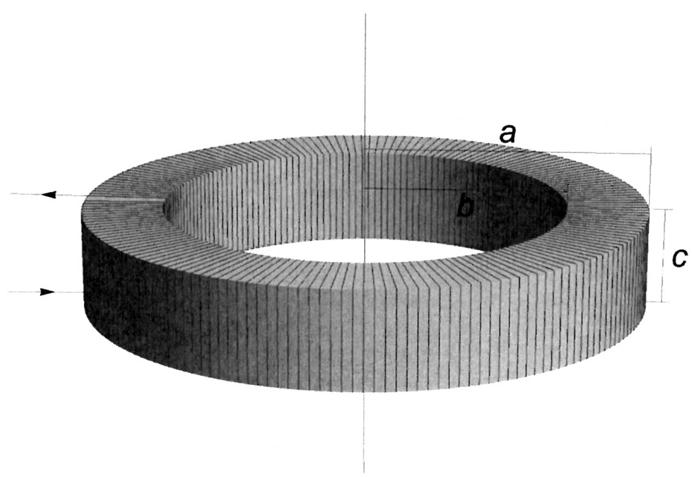
10.10 Pole toroidálního solenoidu

Mějme toroidální solenoid s obecným průřezem.

Tj. mějme útvar získaný rotací smyčky obecného tvaru ležící v polorovině φ = konst. kolem osy z. Po povrchu takto vzniklého útvaru teče plošný proud hustoty $\boldsymbol{\iota}$. Směr proudu leží v rovině φ = konst.. Velikost proudové hustoty ι se nemění s úhlem φ, ale je obecně závislá na souřadnicích R a z. Proudová hustota je dána podmínkou, že celkový proud tekoucí skrze kružnici R, z = konst. je konstantní a roven hodnotě I. (Zde R, φ, z jsou standardní cylindrické souřadnice.)

Nalezněte magnetické pole $\boldsymbol{B}$ uvnitř a vně solenoidu.

Tip: Rozmyslete si, jaký asi bude směr $\boldsymbol{e}$ hledaného pole $\boldsymbol{B}$. Řešení uvnitř solenoidu pak hledejte ve tvar $\boldsymbol{B} = B(R)\,\boldsymbol{e}$ a řešením Maxwellových rovnic nalezněte $B(R)$. Ověřte platnost obou magnetostatických Maxwellových rovnic. Ověřte platnost rovnic i na povrchu solenoidu.



Příklad toroidálního solenoidu s obdélníkovým průřezem.

10.13 Koaxiální vodič zapojený do obvodu

Uvažujme přímý koaxiální kabel orientovaný podél osy z, jehož vnitřní vodič je tvořen válcem ohmického vodiče poloměru a o vodivosti γ a vnější vodič tenkou válcovou plochou poloměru b z ideálního vodiče (tj. o nekonečné vodivosti, nulovém odporu). Délka vodiče ℓ je mnohem větší než poloměry a, b. Na jedné straně ($z = 0$) jsou vnitřní a vnější vodič přímo spojeny (ideálním vodičem), na druhé straně ($z = \ell$) jsou vnitřní a vnější vodič připojeny k baterii udržující na svorkách napětí V.

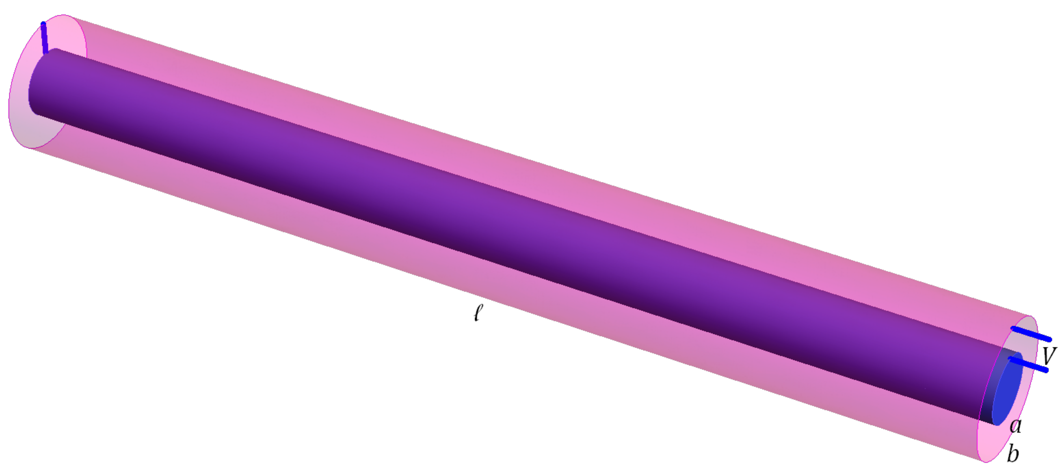
Předpokládejte, že proud v ohmickém vodiči teče homogenně rozložený v každém řezu $z =$ konst.. Nehomogenity na koncích koaxiálního kabelu zanedbejte – předpokládejte, že se zde všechny veličiny chovají tak, jako kdyby kabel pokračoval. Koaxiální kabel je celkově elektricky neutrální.

Nalezněte elektrické pole (jak $\boldsymbol{E}$, tak ϕ) a rozložení proudů ve vodičích. Jakou přirozenou hodnotu potenciálu můžete zvolit na vnějším vodiči? (Pozor, vnitřní vodič není ideální a tak v něm nemusí být konstatní potenciál a nulová intenzita!)

Vyjádřete celkový odpor $\mathcal{R}$ vnitřního vodiče vstupující do Ohmova zákona $V = \mathcal{R}I$.

Nalezněte skalární potenciál ϕ a jemu odpovídající elektrickou intenzitu $\boldsymbol{E}$ mezi vodiči koaxiálního kabelu. (Znáte potenciál na povrchu vodičů. Potenciál na koncových řezech kabelu volte ve shodě se symetrií úlohy – "jako kdyby kabel pokračoval".)

Určete magnetické pole odpovídající nalezeným proudům. (Opět zanedbejte nehomogenity na koncích kabelu.)



12.1 Samoindukčnost solenoidu

Uvažujme nekonečný válcový solenoid poloměru a. Na solenoidu je navinutý tenký vodič o hustotě závitů n, ve kterém teče proud I. Magnetické pole pro tento případ jsme nalezli v problému 10.2.

Spočtěte magmetickou energii připadající na úsek solenoidu délky d.

S pomocí vztahu energie smyčky vyjádřené pomocí samoindukčnosti L a proudu I určete lineární hustotu samoindukčnosti solenoidu $l = L/d$.

12.4 Energetická bilance obvodu s koaxiálním vodičem

Uvažujme obvod z problému 10.13.

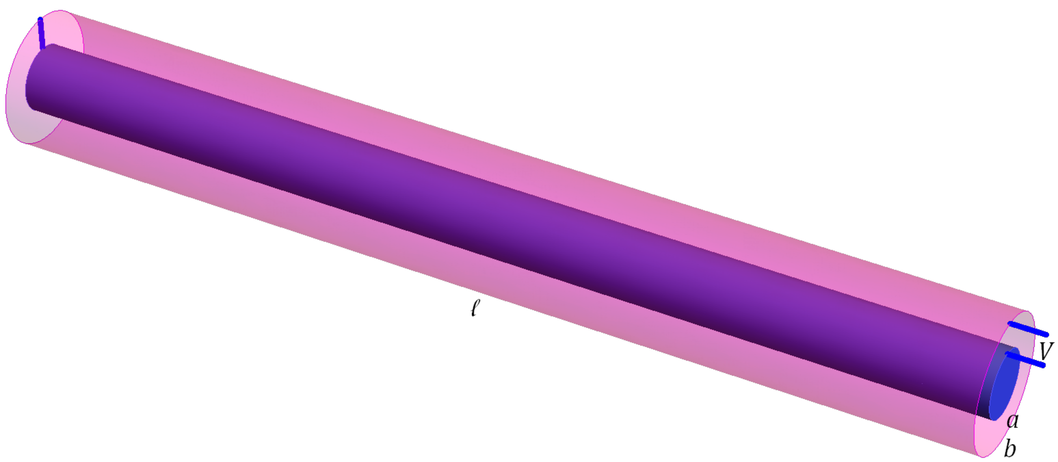
Nalezněte Poyntingův vektor jak uvnitř ohmického vodiče, tak mezi vodiči a vně kabelu.

Spočtěte tok energie skrze válcovou plochu $R = R_o$ na úseku $z \in \langle z_1, z_2 \rangle$. Určete tok konkrétně pro $R = a$. Kam se tato energie poděje? Kolik energie proteče skrze $R = b$?

Spočtěte Jouleovo teplo vyprodukované ve válcové oblasti $R \in \langle 0, R_o \rangle$, $z \in \langle z_1, z_2 \rangle$ ohmického vodiče a jeho velikost konkrétně pro $R_o = a$.

Spočtěte tok energie skrze kruhový řez $z = z_o$, $R \in \langle 0, a \rangle$. Podobně určete tok energie skrze řez $z = z_o$, $R \in \langle a, b \rangle$ (mezikruží mezi vodiči).

Na základě předchozích výpočtů popište, kudy se dostává energie od zdroje do vodiče?



Klasická elektrodynamika – Náměty na cvičení IV

Retardované řešení vlnové rovnice

Příklad X.1 v Kvasnicově učebnici: Ukažte, že

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(r', t - \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|}d^3r' \;=\; -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(r,t)$$

TE vlna jako superpozice rovinných vlny

Uvažujte šíření elektromagnetické vlny v prostoru mezi dvěma rovnoběžnými vodivými rovinami $x = 0$ a $x = a$. Uvažujte dvě rovinné vlny s $\vec{k}_\pm = k_z\vec{e}_z \pm k_x\vec{e}_x) = k(\cos\alpha\;\vec{e}_z \pm \sin\alpha\;\vec{e}_x)$. Obě vlny budou mít stejnou amplitudu a polarizaci ve směru $E_\pm = E\vec{e}_y$. Ukažte, že pro vhodné hodnoty k_x (dále uvažujte nejnižší řešení) splňuje vlna vzniklá superpozicí

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_+ - \vec{E}_-}{2i}\;,\quad \vec{B} = \frac{\vec{B}_+ - \vec{B}_-}{2i}$$

hraniční podmínky pokud na hranici předpokládáme plošné proudy a náboje. Ukažte, že lze oblast mezi oběma rovinami zúžit na obdélníkový vlnovod libovolné výšky.

Pakliže označíme výšku vlnovodu b, a používáme *efektivní* intenzity a proudové hustoty, můžeme spočíst výkon procházející vlnovodem

$$P = \frac{ab}{2}\frac{E^2}{c\mu_0}\cos\alpha$$

a také útlum

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dz} \doteq \frac{\rho_2}{c\mu_0}\frac{2a\cos^2\alpha + 4b\sin^2\alpha}{ab\cos\alpha}$$

kde se předpokládá plošný Ohmův zákon ve tvaru $\vec{E} = \rho_2\vec{j}_2$, kde $\rho_2 = \rho/\delta$ (na uvažovaných frekvencích je velmi malá hloubka vniku, takže plošné proudy jsou dobrým přiblížením). Joulevy ztráty na jednotku délky vlnovodu jsou pak dány integrálem podél obvodu obdélníku $\oint \rho_2|\vec{j}_2|^2 dl$.

Zajímavé je, že bezrozměrný faktor

$$\frac{\rho_2}{c\mu_0} \sim \frac{\delta}{\lambda}$$

takže útlum vlnovodu je zhruba dán poměrem geometrických veličin: obvodu, plochy, vlnové délky a hloubky vniku.