Greenovy funkce v jedné dimenzi

Otakar Svítek, ÚTF MFF UK

Motivace pro zavedení Greenových funkcí

- Řešení lineárních diferenciálních rovnic (obyčejných i parciálních) s pravou stranou pomocí principu superpozice
- Základem je řešení pro zdroj typu bodového náboje nebo hmotného bodu
- Obecnou pravou stranu lze chápat jako superpozicí bodových zdrojů s odpovídající váhou
- Obecné řešení je pak superpozicí řešení pro bodové zdroje

- Metoda Greenových funkcí je velmi rozšířená v matematice, fyzice i inženýrství
- Ukazuje také užitečnost formálního popisu bodových zdrojů pomocí distribucí

George Green (1793 – 1841)

GeorgeGreen@wikipedia

- syn pekaře a později mlynáře z Nottinghamu
- pracoval už od 5-ti let
- jen jeden rok školní docházky
- 7 dětí s Jane Smith (ještě v roce 2008 si místní farář stěžoval, že se nikdy formálně nevzali :)

Zdroj: Kev747 at Wikipedia

- v roce 1823 se stává předplatitelem místní knihovny - jediný známý zdroj jeho pokročilých matematických znalostí
- 1828 vydává "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism" - idea Greenových funkcí a Greenova věta
- 1832-38 vystudoval Cambridge a následně se tam stává profesorem matematiky - publikuje další práce z hydrodynamiky, akustiky a optiky

Idea řešení pomocí superpozice

Nechť L_x je lineární diferenciální operátor působící v $x \in \mathbb{R}$

- rovnice pro bodový zdroj v místě x'

$$L_x G(x, x') \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \delta(x - x')$$

  její řešení $G(x, x')$ je Greenova funkce (distribuce v $x' \in \mathbb{R}$)

- pomocí ní lze vyřešit rovnici $L_x f(x) = g(x)$ pomocí

$$f(x) = \langle G(x, x'), g(x') \rangle$$

  neboť

$$L_x f(x) = L_x \langle G(x, x'), g(x') \rangle = \langle L_x G(x, x'), g(x') \rangle =$$

$$= \langle \delta(x - x'), g(x') \rangle = g(x)$$

- Ve fyzikální notaci lze psát

$$f(x) = \int G(x, x')\, g(x')\, \mathrm{d}x'$$

$$L_x f(x) = L_x \int G(x, x')\, g(x')\, \mathrm{d}x' = \int L_x G(x, x')\, g(x')\, \mathrm{d}x' =$$

$$= \int \delta(x - x')\, g(x')\, \mathrm{d}x' = g(x)$$

kromě $g \in \mathcal{D}$ tady vlastně navíc potřebujeme $G(x, x') \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}_{x'}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, aby bylo G regulární distribucí v x' a integrace měla smysl. Ovšem ve fyzikálním zápisu integraci chápeme symbolicky a nepožadujeme nutně pouze reg. distribuce

- jelikož má většinou L_x netriviální jádro, není zatím $G(x, x')$ určena jednoznačně (lze přičíst řešení rovnice $L_x h(x) = 0$) — jednoznačnost se docílí požadavkem splnění okrajových podmínek

Konstrukce Greenovy funkce

INSPIRACE:

- Pokud speciálně $L_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ víme, že $L_x\Theta \overset{\mathcal{D}'}{=} \delta$ tedy v tomto případě je Greenova funkce

$$G(x, x') = \Theta(x - x')$$

- pokud L_x obsahuje maximálně derivaci stupně n, pak by měla být $n-1$ derivace Greenovy funkce úměrná Heavisideově skokové funkci pro $x - x' \ll 1$

$$G^{(n-1)}(x, x') \sim \Theta(x - x')$$

- tyto úvahy nyní formalizujeme

VĚTA: Konstrukce Greenovy funkce

- $L_x = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}$ je lin. diferenciální operátor stupně n
- $B_{\partial I}$ je operátor hraničních podmínek na zadaném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, tedy $B_{\partial I} f = 0$ znamená, že f splňuje na hranici intervalu vhodné podmínky
- funkce $g_y^{\pm}$ splňují: $L_x g_y^{\pm}(x) = 0 \quad {}^{x \geq y}_{x \leq y}$

$$B_{\partial I^{\pm}} g^{\pm} = 0 \qquad \partial I^{\pm} \text{ je pravá/levá hranice}$$

- $g_y^{+(k)}(y) = g_y^{-(k)}(y) \qquad \forall k = 0, \dots, n-2$
- $g_y^{+(n-1)}(y) - g_y^{-(n-1)}(y) = \frac{1}{a_n(y)}$

Pak Greenovu funkci operátoru L_x s okr. podm. $B_{\partial I}$ lze zapsat

$$G(x,y) = g_y^{+}(x)\,\Theta(x-y) + g_y^{-}(x)\,\Theta(y-x)$$

- příklady $B_{\partial I}$: Dirichletovy $f|_{\partial I} = 0$, Neumannovy $f'|_{\partial I} = 0$

Důkaz výpočtem

$$\frac{\mathrm{d}G(x,y)}{\mathrm{d}x} = {g_y^+}'(x)\,\Theta(x-y) + {g_y^-}'(x)\,\Theta(y-x) +$$

$$+\, g_y^+(x)\,\delta(x-y) - g_y^-(x)\,\delta(x-y)$$

- členy v prvním řádku postupně vybudují L_x pro $g_y^\pm$ a Θ je omezí na pravou/levou část intervalu $\Rightarrow$ nakonec dají 0
- členy v druhém řádku a jim odpovídající z vyšších derivací (tedy členy obsahující δ-funkci nebo její derivace) lze upravit pomocí $f(x)\delta \overset{\mathcal{D}'}{=} f(0)\delta$

$$[g_y^+(y) - g_y^-(y)]\,\delta(x-y) = 0$$

  toto bude fungovat do derivace stupně $(n-2)$ funkcí $g_y^\pm$
- popsané bude platit do derivace st. $(n-1)$ Greenovy funkce

- v nejvyšší derivaci dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^{(n)} G(x,y)}{\mathrm{d}x^{(n)}} = g_y^{+(n)}(x)\,\Theta(x-y) + g_y^{-(n)}(x)\,\Theta(y-x)$$

$$+ g_y^{+(n-1)}(x)\,\delta(x-y) - g_y^{-(n-1)}(x)\,\delta(x-y)$$

$$+ g_y^{+(n-2)}(x)\,\delta'(x-y) - g_y^{-(n-2)}(x)\,\delta'(x-y)$$

$$\vdots$$

  členy v prvním řádku znovu dají "$L_x g_y^{\pm}\,\Theta$" a tedy nulu
  členy ve třetím a dalších řádcích dají nulu ze spojitosti v $x = y$

- druhý řádek vynásobený koeficientem u nejvyšší derivace

$$a_n(x)\left[g_y^{+(n-1)}(x) - g_y^{-(n-1)}(x)\right]\,\delta(x-y) = a_n(y)\frac{1}{a_n(y)}\,\delta(x-y)$$

Q.E.D.

Příklad na sestavení Greenovy funkce

Příklad:
$L_x = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + k^2$, $k > 0$ je konstanta, na intervalu $I = (0, d)$,
okrajové podmínky $B_{\partial I}$ jsou Dirichletovy

1. homogenní řešení $L_x g = 0$

$$g = A\, e^{kx} + B\, e^{-kx}$$

$$\Downarrow$$

$$g_y^{\pm}(x) = A^{\pm}(y)\, e^{kx} + B^{\pm}(y)\, e^{-kx}$$

konstanty mohou obecně záviset na bodě y dělícím interval

2. okrajové podmínky: $g_y^{+}(d) = 0$ a $g_y^{-}(0) = 0$ $\Rightarrow$

$$B^{-}(y) = -A^{-}(y)\ , \quad B^{+}(y) = -A^{+}(y)\, e^{2kd}$$

3. podmínky navázání v $x = y$

$g_y^+(y) = g_y^-(y) \quad \Rightarrow$

$$A^+(y)\left(e^{ky} - e^{-k(y-2d)}\right) = A^-(y)\left(e^{ky} - e^{-ky}\right)$$

$g_y^{+'}(y) - g_y^{-'}(y) = \frac{1}{a_n(y)} = -1 \quad \Rightarrow$

$$kA^+(y)\left(e^{ky} + e^{-k(y-2d)}\right) - kA^-(y)\left(e^{ky} + e^{-ky}\right) = -1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} A^+(y) &= \frac{e^{-kd}}{2k}\frac{e^{ky} - e^{-ky}}{e^{-kd} - e^{+kd}} &= -\frac{e^{-kd}}{2k}\frac{\sinh ky}{\sinh kd} \\ A^-(y) &= \frac{1}{2k}\frac{e^{k(y-d)} - e^{-k(y-d)}}{e^{-kd} - e^{+kd}} &= -\frac{1}{2k}\frac{\sinh k(y-d)}{\sinh kd} \end{aligned}$$

4. celkem tedy

$$
\begin{aligned}
g_y^+(x) &= -\frac{1}{k}\frac{\sinh ky}{\sinh kd}\sinh k(x-d) \\
g_y^-(x) &= -\frac{1}{k}\frac{\sinh k(y-d)}{\sinh kd}\sinh kx
\end{aligned}
$$

5. Greenova funkce

$$
\begin{aligned}
G(x,y) &= -\frac{1}{k}\frac{\sinh ky}{\sinh kd}\sinh k(x-d)\,\Theta(x-y) \\
&\quad -\frac{1}{k}\frac{\sinh k(y-d)}{\sinh kd}\sinh kx\,\Theta(y-x)
\end{aligned}
$$

6. Greenova funkce pro $L_{x_0} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ (použitím $\sinh kx \overset{k\to 0}{\simeq} kx$)

$$
G_0(x,y) = \lim_{k\to 0} G(x,y) = -\frac{y(x-d)}{d}\Theta(x-y) - \frac{x(y-d)}{d}\Theta(y-x) =
$$

$$
= -\frac{xy}{d} + y\Theta(x-y) + x\Theta(y-x)
$$

Závěrečné poznámky

- Rozvoj Greenovy funkce pomocí vlastních funkcí

$$L_x\psi_n = \lambda_n\psi_n \quad \text{na } I \subset \mathbb{R}, \qquad B_{\partial I}\psi_n = 0$$

pro vhodné operátory (Hermitovské) je systém vlastních funkcí úplný a ortogonální

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)\,\psi_n^*(x') = \delta(x-x')\ , \qquad \int_I \psi_n(x)\,\psi_m^*(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{nm}$$

Nechť $G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(y)\psi_n(x)$

$$L_x G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(y)\lambda_n\psi_n(x) = \delta(x-y) \quad / \cdot \psi_m^*(x) + \int \cdot\,\mathrm{d}x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(y)\lambda_n\delta_{nm} = \psi_m^*(y) \quad \Rightarrow \quad G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n^*(y)\,\psi_n(x)}{\lambda_n}$$

- Dalším způsobem výpočtu Greenových funkcí je použití Fourierovy či Laplaceovy transformace — toto byste měli podrobně probírat v přednáškách z matematiky

- Jak řešit příklady typu $L_x = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}$ na intervalu $I = (0, d)$?

  Greenovu funkci nalézt na intervalu $I_\epsilon = (\epsilon, d)$ a následně provést limitu $\epsilon \to 0$