Distribuce v jedné dimenzi

Otakar Svítek, ÚTF MFF UK

1. Motivace
2. Problém a jeho řešení
3. Formalismus
4. Příklady distribucí na $\mathcal{D}$ a operací s nimi

Motivace pro zavedení distribucí

- Matematický popis rozložení nábojové hustoty bodového náboje nebo hustoty hmotného bodu
- Charakterizace zdrojů indukovaných nespojitostí fyzikálních polí (např. elektrické intenzity)
- Potřebné ve fomálním popisu i v dalších disciplínách, např. kvantové mechanice

Ve skutečnosti sice neexistují přesně bodové náboje atd., ale tyto koncepty představují velmi užitečnou idealizaci, ze které lze vyvodit závěry aplikovatelné na široké třídy reálných situací. Navíc jsou výpočty v těchto idealizovaných modelech snadnější.

Problém a jeho řešení

PROBLÉM: Nábojová hustota $\rho(x)$ bodového náboje velikosti q umístěného v $x = 0$ by měla splňovat:

- $\rho = 0$ pro $x \neq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \rho \, \mathrm{d}x = q$

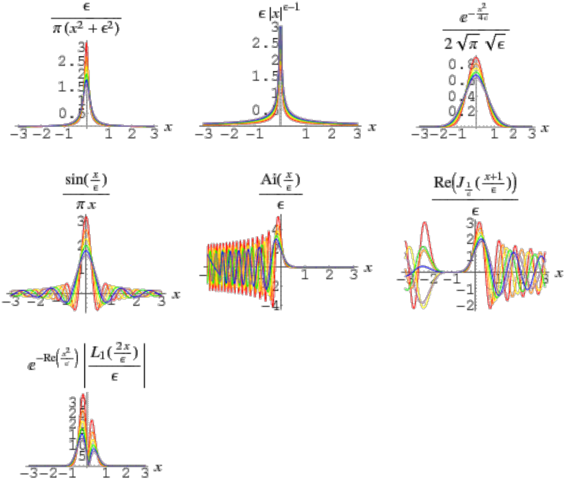
Pokud by mělo jít o Lebesgueův integrál, musí vyjít nula, protože $\rho(x)$ je skoro všude nulová (tedy nulová až na množinu míry nula).

$$\Downarrow$$

Tedy $\rho(x)$ bodového náboje nemůže být funkce.

FYZIKÁLNÍ ŘEŠENÍ: Definovat $\rho(x)$ jako limitu určité třídy posloupností funkcí (viz. elektrodynamika - limita nulového poloměru homogenně nabité koule) a manipulovat pouze s těmito posloupnostmi. Často pracné a nejednoznačné s ohledem na šíři takové třídy posloupností.

Příklady limit ($\epsilon \to 0$) vedoucích ke kýženému výsledku.
Záměnou $\epsilon \to \frac{1}{n}$ zároveň máme zmíněné posloupnosti.



Zdroj: https://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html

MATEMATICKÉ ŘEŠENÍ

Definovat nový objekt - **distribuci** (zobecněnou funkci)

- mimo jiné budou distribucemi výsledky výše zmíněných limit
- vodítkem jsou integrální vlastnosti a fyzikální použití Diracovy distribuce (δ-funkce) typu

$$\int \delta(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x = h(0)$$

kdy funkci $h(x)$ přiřazujeme číslo - její hodnotu v počátku

1950 - Laurent Schwartz získává Fieldsovu medaily za formální teorii distribucí jako objektů přiřazujících funkcím čísla

(je také autorem výborné knihy o distribucích:
L. Schwartz: Matematické metody ve fyzice, SNTL, Praha 1972)

Formalismus

DISTRIBUCE: Spojitý lineární funkcionál na prostoru vhodných testovacích funkcí

Prostor testovacích funkcí - $\mathcal{D}$
Odpovídající prostor distribucí - $\mathcal{D}'$
$T \in \mathcal{D}',\ \phi \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

Notace: $T(\phi) = \langle T, \phi \rangle =$ reálné číslo

- Spojitost: $\phi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} \phi \quad \Rightarrow \quad T(\phi_n) \overset{\mathbb{R}}{\to} T(\phi)$
- Linearita: $T(a\phi_1 + b\phi_2) = aT(\phi_1) + bT(\phi_2)$
  pro $a, b \in \mathbb{R}, \phi_{1,2} \in \mathcal{D}$

- distribuce jsou tedy nekonečně rozměrným zobecněním duálních vektorů z konečné dimenze (místo na vektorech v^i působí na $\phi^x = \phi(x)$) - působení už ale nelze vždy vyjádřit pomocí skalárního součinu (na funkcích daného integrálem)

$$c(v) = c_i v^i = \sum_i c_i v^i \quad \text{vs.} \quad T(\phi) = T_x \phi^x = \int T_x \phi^x \, \mathrm{d}x$$

- krátké motivační video z MIT s vysvětlením použití distribucí mimo fyziku https://www.youtube.com/watch?v=ECslmuGlu-U
- $\mathcal{D}$ často prostor hladkých funkcí na $\mathbb{R}$ s kompaktním nosičem
- příklady dalších prostorů testovacích funkcí a odpovídajících ditribucí včetně jejich základních vlastností naleznete v utf.mff.cuni.cz/vyuka/NOFY070/materialy/distribuce/distribuce1D.pdf

Prostor testovacích funkcí $\mathcal{D}$ se může volit podle potřeby a jeho volba vymezuje velikost prostoru distribucí. Obvyklé volby jsou:

$\mathcal{D}'$ – distribuce

$\mathcal{D}$ prostor hladkých funkcí s kompaktním nosičem
$\mathcal{D}'$ prostor distribucí s neomezeným růstem

$$\mathcal{D} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{C}^\infty \ \wedge \ \operatorname{supp}\varphi \text{ je kompaktní}\}$$

$$\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi \ \equiv \ \exists K \text{ kompaktní} \quad \forall n \ \operatorname{supp}\varphi_n \subset K \quad \forall k \ \ \varphi_n^{[k]} \overset{K}{\rightrightarrows} \varphi^{[k]}$$

$\mathcal{S}'$ – temperované distribuce

$\mathcal{S}$ prostor rychle klesajících hladkých funkcí
$\mathcal{S}'$ prostor distribucí s pomalým růstem, tzv. temperované distribuce

$$\mathcal{S} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{C}^\infty \ \wedge \ \forall m \ \ |x|^m \varphi(x) \text{ omezená}\}$$

$$\varphi_n \overset{\mathcal{S}}{\to} \varphi \ \equiv \ \forall k, m \ \ |x|^m \, \varphi_n^{[k]}(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} |x|^m \, \varphi^{[k]}(x)$$

$\mathcal{E}'$ – distribuce s kompaktním nosičem

$\mathcal{E}$ prostor hladkých funkcí bez omezení na růst
$\mathcal{E}'$ prostor distribucí s kompaktním nosičem

$$\mathcal{E} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{C}^\infty\}$$

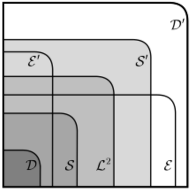
$$\varphi_n \overset{\mathcal{E}}{\to} \varphi \ \equiv \ \forall K \text{ kompaktní} \quad \forall k \ \ \varphi_n^{[k]} \overset{K}{\rightrightarrows} \varphi^{[k]}$$

Poznamenejme, že prostor kvadraticky integrovatelných funkcí $\mathcal{L}^2$ tvoří Hilbertův prostor a lze proto ztotožnit se svým vlastním duálem, $\mathcal{L}^{2\prime} = \mathcal{L}^2$.
Tyto prostory jsou v následujícím vztahu:

$$\mathcal{D} \overset{\text{hustě}}{\subset} \mathcal{S} \overset{\text{hustě}}{\subset} \mathcal{E}\,, \qquad \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'\,,$$

$$\mathcal{D} \overset{\text{hustě}}{\subset} \mathcal{S} \overset{\text{hustě}}{\subset} \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'\,.$$

Dále budeme hlavně uvažovat obecné distribuce z $\mathcal{D}'$. Prostor temperovaných distribucí $\mathcal{S}'$ je důležitý v teorii Fourierovy transformace.



- Rovnost distribucí

$$T_1 \overset{\mathcal{D}'}{=} T_2 \iff \forall \phi \in \mathcal{D} \quad \langle T_1, \phi \rangle = \langle T_2, \phi \rangle$$

- Rovnost distribucí na oblasti Ω

$$T_1 \overset{\Omega}{=} T_2 \iff \forall \phi \in \mathcal{D},\ \mathrm{supp}(\phi) \in \Omega \quad \langle T_1, \phi \rangle = \langle T_2, \phi \rangle$$

- Nosič distribuce

$$\mathrm{supp}(T) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\Omega:\, T \overset{\Omega}{=} 0} \Omega$$

- Konvergence distribucí

$$T_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} T \iff \forall \phi \in \mathcal{D} \quad \langle T_n, \phi \rangle \to \langle T, \phi \rangle$$

Příklady distribucí na $\mathcal{D}$ a operací s nimi

- Diracova distribuce (δ-funkce)

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$$

odpovídá fyzikálnímu zápisu $\int \delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x$

- posunutá δ-funkce

$$\langle \delta_a, \phi \rangle = \langle \delta(x-a), \phi(x) \rangle = \phi(a)$$

- **Regulární distribuce** T_f - generovaná lokálně integrabilní funkcí $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

Heavisideova (skoková) funkce Θ generuje distribuci T_Θ (často se zjednodušeně píše $T_\Theta = \Theta$)

$$\langle T_\Theta, \phi \rangle = \langle \Theta, \phi \rangle = \int_0^{\infty} \phi(x)\mathrm{d}x$$

- **Derivace distribucí**
  Motivace: (!!! ϕ má kompaktní nosič, tedy $\phi(\pm\infty) = 0$!!!)

$$\langle T_f', \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x)\phi(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = -\langle T_f, \phi'\rangle$$

DEFINICE DERIVACE

$$\langle T', \phi\rangle = -\langle T, \phi'\rangle$$

- v rámci distribucí platí $T_\Theta' \overset{\mathcal{D}'}{=} \Theta' \overset{\mathcal{D}'}{=} \delta$, neboť

$$\langle T_\Theta', \phi\rangle = \langle \Theta', \phi\rangle = -\langle \Theta, \phi'\rangle = -\int_{0}^{\infty} \phi'(x)\mathrm{d}x =$$

$$= -\Big[\phi(x)\Big]_{0}^{\infty} = \phi(0) = \langle \delta, \phi\rangle$$

- derivace δ-funkce

$$\langle \delta', \phi \rangle = -\langle \delta, \phi' \rangle = -\phi'(0)$$

$$\langle \delta'', \phi \rangle = -\langle \delta', \phi' \rangle = \langle \delta, \phi'' \rangle = \phi''(0)$$

$$\vdots$$

$$\langle \delta^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \, \phi^{(n)}(0)$$

- násobení hladkou funkcí **definujeme** ($f\phi$ je automaticky s kompaktním nosičem)

$$\langle fT, \phi \rangle = \langle T, f\phi \rangle$$

- pak například $\langle f\delta, \phi \rangle = \langle \delta, f\phi \rangle = f(0)\phi(0) \Rightarrow f\delta \overset{\mathcal{D}'}{=} f(0)\delta$

$$\langle f\delta', \phi \rangle = \langle \delta', f\phi \rangle = -\langle \delta, f'\phi + f\phi' \rangle = -f'(0)\phi(0) - f(0)\phi'(0)$$

$$\Rightarrow \quad f\delta' \overset{\mathcal{D}'}{=} -f'(0)\delta + f(0)\delta'$$

Derivace funkce nehladké v $x = 0$

Mějme

$$f(x) = f_-(x)\Theta(-x) + f_+(x)\Theta(x) \ ,$$

kde $f_\pm$ jsou hladké.

Označme

$$[f] = f_+(0) - f_-(0) \qquad f^{[\prime]}(x) = f'_-(x)\Theta(-x) + f'_+(x)\Theta(x)$$

Potom lze distribuční derivace zapsat takto

$$f'(x) = f^{[\prime]}(x) + f_-(x)\{-\delta\} + f_+(x)\{\delta\} \Rightarrow f' = f^{[\prime]} + [f]\delta$$

$$f'' = f^{[\prime\prime]} + [f]\delta' + [f^{[\prime]}]\delta$$

$$\vdots$$

- řešení distribuční rovnice $xT \overset{\mathcal{D}'}{=} 0$ (kde $\langle 0, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$)

$$xT \overset{\mathcal{D}'}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad T \overset{\mathcal{D}'}{=} c\delta \quad c \in \mathbb{R}$$

Dk.: "$\Rightarrow$"

$$0 = \langle xT, \phi \rangle = \langle T, x\phi \rangle$$

zvolme pevné $\omega \in \mathcal{D}, \omega(0) = 1$, pak lze provést rozklad

$$\forall \psi \in \mathcal{D} \quad \exists \phi \in \mathcal{D} : \quad \psi(x) = x\phi(x) + \psi(0)\omega(x)$$

$$\langle T, \psi \rangle = \langle T, x\phi + \psi(0)\omega \rangle = \langle T, x\phi \rangle + \psi(0)\langle T, \omega \rangle$$

označme $\langle T, \omega \rangle = c \in \mathbb{R}$, pak $\langle T, \psi \rangle = c\psi(0) = c\langle \delta, \psi \rangle$

$$\Rightarrow T \overset{\mathcal{D}'}{=} c\delta$$

"$\Leftarrow$" je zjevné, zkuste si

- distribuční logaritmus $\ln|x|$ definujeme
  $(\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \ln(x)\mathrm{d}x = -1 \quad \Rightarrow \quad \ln|x| \in L_{loc}(\mathbb{R}))$

$$\langle \ln|x|, \phi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x|\, \phi(x)\, \mathrm{d}x$$

- hlavní hodnotu (principal value) $Pv\,\frac{1}{x}$ definujeme

$$\langle Pv\,\frac{1}{x}, \phi(x)\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\epsilon,\epsilon)} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

- platí $(\ln|x|)' \overset{\mathcal{D}'}{=} Pv\,\frac{1}{x}$ neboť

$$\langle (\ln|x|)', \phi(x)\rangle = -\langle \ln|x|, \phi'(x)\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \ln|x|\, \phi'(x)\, \mathrm{d}x = \bigstar$$

rozdělme integrál na dvě části $\int_{-\infty}^0 + \int_0^\infty$ a zkoumejme druhou

$$\int_0^\infty \ln|x|\, \phi'(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^\infty \ln|x|\, \phi'(x)\, \mathrm{d}x =$$

(použijeme per partes)

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\Big[\ln|x|\,\phi(x) \Big]_{\epsilon}^{\infty} - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right)$$

využitím hladkosti a kompaktnosti ϕ dostáváme

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\ln|\epsilon|\,\phi(0) - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right)$$

druhá část integrálu bude obsahovat stejný první člen, ale s opačným znaménkem, po jejich odečtení budeme mít

$$\bigstar = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right) = \left\langle Pv\,\frac{1}{x}, \phi(x) \right\rangle$$

Q.E.D.

- **substituce v distribuci** $x \to y = g(x)$, g lokálně prostá uvnitř obrazu nosiče distribuce prostřednictvím "g^{-1}" (motivace reg. distribucemi)

$$\langle T_{f(g)}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(g(x))\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(y)\phi(g^{-1}(y))\frac{\mathrm{d}y}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

$$\Rightarrow \quad \langle T(g), \phi \rangle = \left\langle T, \frac{\phi(g^{-1})}{|g'(g^{-1})|} \right\rangle$$

- speciálně pro δ-funkci (suma přes nulové body funkce g)

$$\langle \delta(g), \phi \rangle = \sum_{a_i : g(a_i) = 0} \frac{\phi(a_i)}{|g'(a_i)|}$$

$$\text{tedy} \quad \delta(g) = \sum_{a_i : g(a_i) = 0} \frac{1}{|g'(a_i)|}\delta(x - a_i)$$

zkuste použít pro $g(x) = x^2 - a^2$