$$\Rightarrow \oint_{\partial(S)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{pro libovolnou } S$$

$$\vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{A} \equiv \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_{\partial(\Delta S)} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0}$$

alternativa: $\vec{E} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi : [\nabla\times\nabla\varphi]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi = 0$

– místo siločar můžeme k popisu využívat i ekvipotenciální plochy $\varphi = \mathrm{const}$

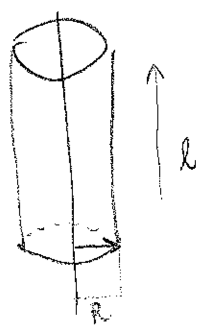
⇒ siločáry jsou na ně kolmé

(normála k $\varphi = \mathrm{const}$ má směr $\nabla\varphi = -\vec{E}$)

aplikace: integrální rovnice používáme v případě symetrických problémů

př.: nekonečný rovnoměrně nabitý drát (η)

$\vec{E} = ?$ symetrie $\Rightarrow \vec{E} = (E_r, 0, 0)$



$$\Rightarrow \Phi = 2\pi R \cdot l\, E_R = l\eta/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow E_R(R) = \frac{\eta}{2\pi R}\frac{1}{\varepsilon_0}$$

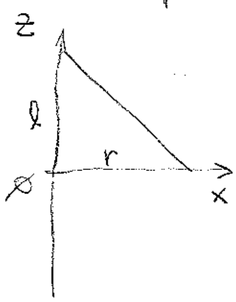
potenciál: $\varphi = \varphi(r) \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\varphi \Rightarrow E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \frac{-\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

! nelze volit $\lim_{r\to\infty}\varphi(r) = 0$

toto nastává, když náboje nejsou v omezené oblasti

přímá integrace: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')\,dl \Rightarrow$



$$\Rightarrow E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta}{(r^2+l^2)^{3/2}}(-l)\,dl = 0$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta}{(r^2+l^2)^{3/2}}\,r\,dl = \frac{\eta r}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r^3}\frac{dl}{(1+(\frac{l}{r})^2)^{3/2}} \cancel{\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}}$$

$$= \frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[\frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\cdot 2 = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{OK}$$

př. Kulová slupka : rovnoměrně nabitá ... σ

$$\Rightarrow \vec{E} = (E_r, 0, 0),$$

gaussova plocha nechť je $r = \text{const}$

1) uvnitř slupky: $Q = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \Rightarrow E_r = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}$

2) vně: $Q = 4\pi R^2 \sigma \Rightarrow \Phi = Q/\varepsilon_0 \Rightarrow 4\pi r^2 E_r = 4\pi R^2 \sigma / \varepsilon_0$

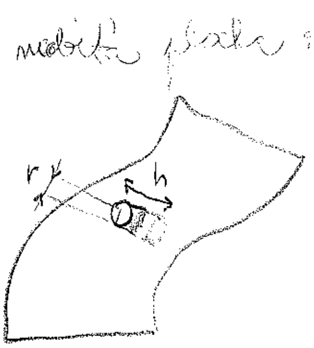
$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2$$ připomenout bodový náboj + zmínit plnou kouli

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r} \qquad (\varphi(\infty) = 0)$$

uvnitř koule: $\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R$

skok intenzity: $E_{n1} - E_{n2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

př. nabitá plocha: skok intenzity?

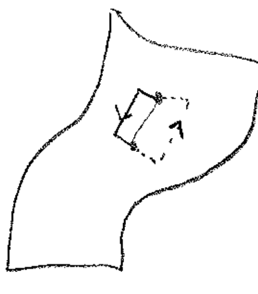


$$\Delta\Phi = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} = E_{n1}\Delta S - E_{n2}\Delta S = \vec{E}_{n1}\cdot\vec{\Delta S} + \vec{E}_{n2}\cdot\vec{\Delta S}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$\hookrightarrow \equiv \mathrm{Div}\,\vec{E}$ plošná divergence

a tečné složky?



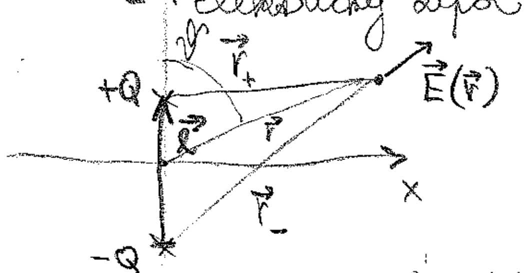
$$0 = \mathrm{rot}\,\vec{E} \Rightarrow \cancel{\lim_{\Delta S \to 0}\frac{1}{\Delta S}} \oint_{\partial(\Delta S)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 =$$

$$= E_{t1}\cdot l_t - E_{t2}\cdot l_t \Rightarrow E_{t1} = E_{t2}$$

$\mathrm{Rot}\,\vec{E} = 0$ plošná rotace

(toto nám bude sloužit v okrajové podmínky při hledání $\vec{E}$)

Elektrický dipól



$$\cancel{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}\right] \neq =}$$

$$\cancel{= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{l}+\vec{r}_+}{|\vec{l}+\vec{r}_+|^3}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_+^3}\left[\vec{r}_+ - \frac{\vec{l}+\vec{r}_+}{\ldots}\right] \ldots}$$

lépe: $\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \doteq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\vartheta}{r_+ r_-}$

pro $|\vec{r}_-|, |\vec{r}_+| \gg |\vec{l}|$

nechť nyní $|\vec l| \to 0;\ Q \to \infty$ ale $\lim\limits_{\substack{l\to 0\\ Q\to\infty}} lQ = \vec p$ konečné

$$\Rightarrow \varphi(\vec r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec r-\frac{\vec l}{2}|} - \frac{1}{|\frac{\vec l}{2}+\vec r|}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r\left(1+\frac12\frac{\vec r\cdot\vec l}{r^2}\right) - r\left(1-\frac12\frac{\vec r\cdot\vec l}{r^2}\right)}{r^2} =$$

$$|\vec a-\vec b| = a\sqrt{\left(\frac{\vec a}{a}-\frac{\vec b}{a}\right)\cdot\left(\frac{\vec a}{a}-\frac{\vec b}{a}\right)} = a\left(1-\frac{\vec b\cdot\vec a}{a^2}+\frac12\frac{b^2}{a^2}\dots\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec l\cdot\vec r}{r^3} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3} = \varphi(\vec r)}$$

intenzita: $\vec E = -\nabla\varphi(\vec r)$

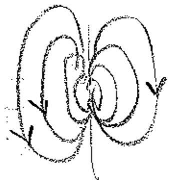
$p_i X_{ji} = p_j$

$$\vec E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\vec p\cdot\vec r\,\nabla\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}(\vec p\cdot\nabla)\vec r\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac32\,\frac{1}{r^5}\cdot 2\vec r\,(\vec p\cdot\vec r) + \frac{1}{r^3}\vec p\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec p\cdot\vec r)\vec r}{r^5} - \frac{\vec p}{r^3}\right]$$

daleko: klesá $\sim 1/r^3$ $\Rightarrow$ uplatní se, pokud celkový náboj $= 0$

siločáry jsme si kreslili



$\updownarrow \vec p$

(důležitá charakteristika molekul a atomů)

- síly působící na dipól ve vnějším poli:

$$\vec F = -Q\vec E\left(\vec r-\frac{\vec l}{2}\right) + Q\vec E\left(\vec r+\frac{\vec l}{2}\right) = Q\left(\left(\frac{\vec l}{2}\cdot\nabla\right)\vec E(\vec r) + \left(\frac{\vec l}{2}\cdot\nabla\right)\vec E(\vec r)\right) =$$

$$= Q(\vec l\cdot\nabla)\vec E(\vec r) = (\vec p\cdot\nabla)\vec E(\vec r)$$ (homogenní pole nic)

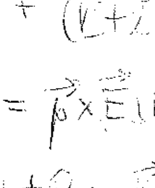
moment síl: $\vec M = \sum\vec r\times\vec F = -\vec r\times Q\vec E(\vec r) + (\vec r+\vec l)\times Q\vec E(\vec r+\vec l) =$

(do 1. řádu v l) $= \vec p\times\vec E(\vec r) + \vec r_+\times Q(\vec l\cdot\nabla)\vec E(\vec r) = \vec p\times\vec E(\vec r) + \vec r\times\vec F$

potenciální energie: $E = -Q\varphi\left(\vec r-\frac{\vec l}{2}\right) + Q\varphi\left(\vec r+\frac{\vec l}{2}\right) =$

$= \vec p\cdot\nabla\varphi = -\vec p\cdot\vec E$ (neuvažujeme vnitřní energii)

- takto lze pokračovat $\Rightarrow$ vyšší multipóly



$\vec r = \vec l + \vec r'$

$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$ $\quad\varphi_1(\vec r) = \varphi_0(Q;\vec r-\vec l) + \varphi_0(-Q;\vec r) =$

$= -\vec l\cdot\nabla\varphi_0(Q;\vec r) = -\vec p\cdot\nabla\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$|l|, |p| \to \infty$

$\varphi_2(\vec r) = \varphi_1(\vec p;\vec r-\vec l) + \varphi_1(-\vec p;\vec r) = -\vec l\cdot\nabla\varphi_1(\vec p;\vec r) = \vec l\cdot\nabla\left(\vec p\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p^{(2)}}{2}\vec e_2\cdot\nabla\left(\vec e_1\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)$

$\dots\quad \varphi_n(\vec r) = (-1)^n\,\frac{p^{(n)}}{n!}(\vec e_n\cdot\nabla)(\vec e_{n-1}\cdot\nabla)\dots(\vec e_1\cdot\nabla)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

Multipólový rozvoj

zmínit bodový náboj: tato přiblížení jde dál...

$$\rho(\vec{r})$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \rho(\vec{r}\,')\,\frac{d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \left(r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'\right)^{-1/2}$$

$$Q \equiv \int \rho(\vec{r}\,')\,d^3\vec{r}\,'$$

$\boxed{r > r'}$ (závisí na volbě souřadnic)

$$p_i = \int \rho(\vec{r}\,')\,r_i'\,d^3\vec{r}\,'$$

$$Q_{ij} = \int \rho(\vec{r}\,')\left[3r_i'r_j' - r'^2\delta_{ij}\right]d^3\vec{r}\,'$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\left(1 - 2\vec{e}_r\cdot\frac{\vec{r}\,'}{r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{r}\ldots$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} d^3\vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')\frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\overbrace{\left(-2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)}^{\alpha} + \frac{1}{2!}\frac{3}{4}\alpha^2 - \frac{1}{3!}\frac{15}{8}\alpha^3 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int_{V'} d^3\vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')\left[1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \left(\frac{3}{8}4\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2}{r^4} - \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2}\right) + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int_{V'} d^3\vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,') + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\vec{r}\cdot\int_{V'}\rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'\,d^3\vec{r}\,' +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^5}r_i r_j\int_{V'}\rho(\vec{r}\,')\left[3r_i'r_j' - r'^2\delta_{ij}\right]d^3\vec{r}\,' + \ldots$$

- souvislost s elementárními multipóly? dosaď δ-fce! (pozor na případné vycentrování!)

$$\Rightarrow \varphi_n \sim \frac{1}{r^n} \Rightarrow E_n \sim \frac{1}{r^{n+1}} \Rightarrow \Phi_n \sim \frac{1}{r^{n-1}} \Rightarrow \Phi_1 \sim \frac{\int \rho(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,'}{\varepsilon_0} \quad \text{OK}$$

$$\Phi_{i>1} \to \emptyset \quad \text{OK}$$

přesně: $\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\,d^3\vec{r}\,'$

Věta: $\forall$ pole nábojů, které lze obklopit koulí, lze vyjádřit formou řady multipólů (vně koule). (Věta o multipólovém rozvoji)

Multipólový rozvoj

1	$-3/2$	$-1/2$
2	$-5/2$	$3/4$
3	$-7/2$	$-15/8$
4		$105/16$

$$\left((1+x)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}$$

$$\frac{1}{(1+x)^{1/2}} \Rightarrow 1$$

$$(1+x)^{-1/2\,(i)} = (-1)^i (1+x)^{-1/2-i}\, \underbrace{1.3.5\ldots(2i-1)}_{(2i-1)!/(i-1)!\,2^{i-1}} \cdot 2^{-i}$$

$$\Rightarrow (1+x)^{-1/2\,(i)}\Big|_{x=\emptyset} = (-1)^i \frac{(2i-1)!}{2^{2i-1}(i-1)!}$$

$i=1: \quad -\frac{1}{2}$

$i=4: \quad \frac{7!}{2^7 \cdot 3!} = \frac{7.6.5.4}{2^3 \cdot 2^4} = \frac{35.3}{16} = \frac{105}{16}$ OK

– div $\vec{E}$ pro multipól ?

$$\operatorname{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \to \emptyset} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \lim_{r\to\emptyset} \cancel{\frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_\emptyset^\pi \int_\emptyset^{2\pi} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta\, d\varphi} \, (-\nabla\varphi_n)\cdot \ldots$$

$$\cancel{\sim \lim_{r\to\emptyset} \frac{-1}{\frac{4}{3}\pi r^3} r^2\, 4\pi \frac{1}{r^{n+1}}} \sim \lim_{r\to\emptyset} r^{-(n+2)}$$

$$\cancel{= \lim_{r\to\emptyset} \frac{-r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_\emptyset^\pi \int_\emptyset^{2\pi} \sin\vartheta \left(\nabla\varphi_n\right)\cdot \vec{e}_r \, d\vartheta\, d\varphi = \frac{3}{4\pi} \lim_{r\to\emptyset} \frac{1}{r} \int_\emptyset^\pi \int_\emptyset^{2\pi} \sin\vartheta \frac{p^{(n)}}{n!} \prod_{i=1}^{n} (\vec{a}_i \cdot \nabla)}\, ,$$

$$\cancel{\cdot\, \nabla \frac{1}{R} \cdot \vec{e}_r \, d\vartheta\, d\varphi}$$

$$\cancel{\nabla \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \nabla R = -\frac{1}{R^2}\frac{1}{2}\frac{1}{R} \cdot 2\vec{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \operatorname{div}\vec{E} = \frac{3p^{(n)}}{4\pi n!} \prod_{i=1}^{n} (\vec{a}_i \cdot \nabla) \lim_{r\to\emptyset} \frac{1}{r} \int_\emptyset^\pi \int_\emptyset^{2\pi} \sin\vartheta \left(-\frac{1}{r^2}\right)}$$

- ∀ plocha (konečná, neprocházející multipólem) obklopující ∀ náboje ⇒ ⇒ celkový náboj uvnitř $= \emptyset$ ⇒ $\phi = \emptyset$ ⇒ div $\vec{E} = \emptyset$
- jde o statickou situaci ⇒ rot $\vec{E} = \emptyset$

Křivočaré souřadnice

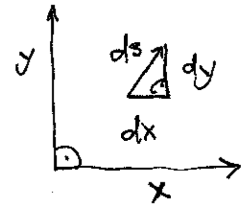
– proč? • lepší popis symetrie problému

→ příklad : zeměpisné souřadnice pro zeměkouli × místní pravoúhlé sítě na mapách

udání polohy ve městě : jméno ulice + číslo (či 2 ulice)

• nespojité ...

– ortogonální – rovno / ~~kolmo~~ / přímo úhlé :

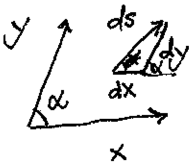


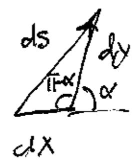
↗ diferenciál souřadnic

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

↳ element délky

– neortogonální:





$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - 2\,dx.dy.\cos(\pi-\alpha) =$$
$$= dx^2 + dy^2 + \underbrace{2\,dx.dy.\cos\alpha}_{\text{smíšené členy}}$$

(zmínit zcela obecné souřadnice)

– zůstaneme u ortog. ale v 3D : souřadnice q_1, q_2, q_3

$$\Rightarrow \quad d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i \vec{e}_i \, dq_i \quad ; \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

↳ 3 vzájemně kolmá infinitezimální posunutí ve směru souřadnic

$h_i = h_i(q_1, q_2, q_3)$ ... Lamého koeficienty

• ... někdy lze uhodnout

• znám-li transformaci do kartézských souř., kde $ds^2 = \sum_{i=1}^{3} (dx_i)^2$

$$\Rightarrow \quad h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

• válcové souřadnice : uhodnout + zkontrolovat $\quad ds^2 = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\varphi^2$

sférické souřadnice ↪ obrázek $\quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi^2$

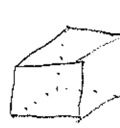
singulární body : počátek souřadnic

$\nabla\varphi$

$$[\text{grad}\,\varphi]_i \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial l_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}$$

$$\text{div}\,\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

integrální definice



výtok přes 6 plošek

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_i}\left(A_i h_j h_k\right)\right]$$

(podle Gaussovy věty je ekvivalentní) $\quad \to \Delta = \nabla.\nabla$

$$\vec{n} / \text{rot}\,\vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{l(\Delta S)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$/ \, \Delta\vec{S} = \Delta S . \vec{n}$

Křivočaré souřadnice

$x_i = x_i(q_j)$

$$h_j \, dq_j = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_j}\right)^2} \, dq_j$$

$$x = \rho \cos\varphi \qquad x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi \qquad y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z = z \qquad z = r \cos\vartheta$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \rho} &= \cos\varphi \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} &= \sin\varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} &= 0 \end{aligned}\right\} h_\rho = 1$$

$$h_r = 1$$
$$h_\vartheta = r$$
$$h_\varphi = r \sin\vartheta$$

$$h_z = 1$$
$$h_\varphi = \rho$$

$$ds^2 = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\varphi^2 \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi^2$$

$$dV = \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi \qquad dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot \vec{dl} \qquad \nabla\varphi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial l_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{h_1 h_2 h_3 \, dq_1 dq_2 dq_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2)\right] dq_1 dq_2 dq_3 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2)\right)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} \frac{h_j h_k}{h_i}\right)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} (A_i h_j h_k) \right)$$ Einsteinova konvence

$$\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} = \lim_{\Delta S \to \emptyset} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\partial(\Delta S)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \left[\operatorname{rot} \vec{A}\right]_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 h_2) \right]$$

$$\vdots$$

$$\left[\operatorname{grad} \varphi\right]_i = \frac{\partial \varphi}{\partial l_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}$$

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{h_j h_k}{h_i} \right) \right)$$

Zobecněné funkce

- nechceme používat pro bodové náboje Coulombův zákon, ale

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}\,') \frac{d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

o nějakou hustotou $\rho(\vec{r}\,')$

- jak dostaneme pole bodového náboje? → zmenšujeme kouli (konst. prostorová hustota) a držíme celkový náboj konst.

  ⇒ vnější pole stále stejné

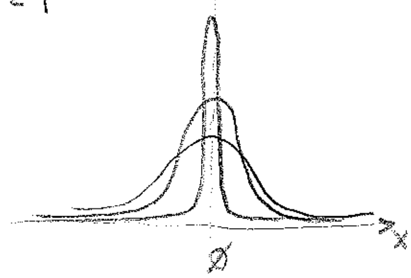
- bude to limita takového případu $r \to 0 \Rightarrow \rho \to \infty$
- dvě různě velké koule dají 2 různá ∞... jak to popsat?

  → Diracova δ-fce

  $\forall x \neq x_0 : \delta(x) = 0$; "$\delta(x_0) = \infty$"

  - jde o zobecnění hustoty pravděpodobnosti pro přesně lokalizovanou částici ⇒ $\int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx = 1$

  $$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \delta(x-0)\,dx = 1$$



- prozkoumejme $\Delta \frac{1}{r}$!

- $\vec{r} \neq 0 : \Delta \frac{1}{r} = \nabla\cdot\nabla\frac{1}{r} = -\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = -\left[\vec{r}\cdot\frac{1}{r^4}(-3)\frac{\vec{r}}{r} + \frac{3}{r^3}\right] = 0$

- $\vec{r} = 0$: integrální definice : $\Delta\frac{1}{r} = \mathrm{div}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\cdot d^2\vec{S} =$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{r^2}\right) r^2\, d\varphi \sin\vartheta\, d\vartheta = -3 \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} = -\infty$$

- $\displaystyle\int_{V \to \text{koule}} \Delta\frac{1}{r}\, d^3\vec{r} = \int_{\partial(\text{koule})} \left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\cdot d^2\vec{S} = -4\pi$

viz ještě (20)! ⇒ $\boxed{\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\,\delta^3(\vec{r}-0)}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2-a^2)\varphi(x)\,dx = \qquad x^2-a^2=y \quad 2x\,dx=dy \quad dx=\frac{1}{2}\frac{dy}{\pm\sqrt{y+a^2}} \quad x=\pm\sqrt{y+a^2} \quad \int_0^\infty + \int_{-\infty}^0$$

doplnek

$$= \int_{-a^2}^{\infty} \delta(y)\varphi\left(+\sqrt{y+a^2}\right)\frac{1}{2}\frac{dy}{+\sqrt{y+a^2}} + \int_{\infty}^{-a^2} \delta(y)\varphi\left(-\sqrt{y+a^2}\right)\frac{1}{2}\frac{dy}{-\sqrt{y+a^2}} =$$

$$= \frac{1}{2a}\varphi(a) + \frac{1}{2a}\varphi(-a)$$

$\delta(f(x)) = ?$ nechť $f(x)$ má n kořenů $f(x_i) = 0;\ i = 1..n$

$$\int \delta(f(x))\varphi(x)\,dx = \sum_i \int_{\text{okolí } x_i} \delta(f(x))\varphi(x)\,dx =$$

$$= \sum_i \int_{\text{okolí } x_i} \delta\left((x - x_i) f'(x_i) + \ldots\right)\varphi(x)\,dx = \sum_i \int_{\text{okolí } x_i} \delta(y)\,\varphi\left(f^{-1}(y)\right)\frac{dy}{f'} =$$

$$\left(\begin{array}{c} y = f(x) \\ dy = \frac{df}{dx}\,dx \end{array}\right)$$

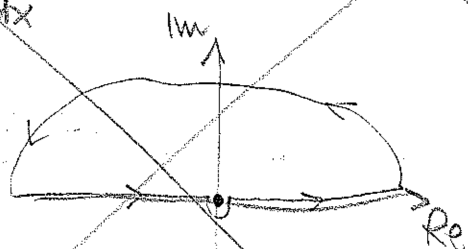
$$= \sum_i \varphi\left(f^{-1}(0)\right)\frac{1}{f'(x_i)} = \sum_i \varphi(x_i)\frac{1}{f'(x_i)}$$

$$X = \int \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha}{\pi}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}\varphi(x)\,dx = \int \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha}{\pi}\frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i\alpha x}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{x\to\infty} \int \underbrace{\frac{\left(e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}\right)}{x}}_{\psi}\varphi(x)\,dx =$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\psi = i\left[e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}\right] = 2i\cos\alpha x$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\alpha\to\infty} \int_\alpha\int_x 2i\cos\alpha x\,\varphi(x)\,dx$$



$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{C_\pi} \frac{\alpha}{\pi}\frac{e^{i\alpha z} - e^{-i\alpha z}}{2i\alpha z}\varphi(z)\,dz =$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\alpha}{\pi} e^{i\alpha}$$

doplněk ke δ-fcím

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta\frac{1}{r}\cdot f \, d^3\vec{r}$$

$$f\cdot\Delta\frac{1}{r} = f\cdot \operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \operatorname{div}\left(f \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) - \operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot\operatorname{grad} f$$

$$\Rightarrow \int \Delta\frac{1}{r}\cdot f\, d^3\vec{r} = \int\left[\operatorname{div}\left(f\nabla\frac{1}{r}\right) - \nabla\frac{1}{r}\cdot\nabla f\right] d^3\vec{r} =$$

$$= \oint_{\partial V} f\nabla\frac{1}{r}\cdot d^2\vec{S} + \int_V \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\nabla f\, d^3\vec{r} = 0 + \int_V \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\nabla f\, d^3\vec{r} = \iiint_V \frac{\vec{r}\cdot\nabla f}{r^3} r^2 \sin\vartheta \, d\varphi\, d\vartheta\, dr =$$

$$= \iiint_V \sin\vartheta \frac{\partial f}{\partial r}\, dr\, d\varphi\, d\vartheta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (-f(0))\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = -4\pi f(0)$$

- $\int_{\mathbb{R}} \delta(x-x')f(x)\,dx = f(x') \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \delta(x-x')\,dx = 1$
- umožňuje integrovat per partes a používat větu o substituci

$$\int \frac{d}{dx}\delta(x-x')f(x)\,dx = \delta(x-x')f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \delta(x-x')\frac{d}{dx}f(x)\,dx = -f'(x')$$

- $\Theta(x-a) \begin{cases} =1 & \text{pro } x \geq a \\ =0 & \text{pro } x<a \end{cases}$ kolik je $\frac{d}{dx}\Theta(x-a)$?

(Heaviside)
(step-function)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\Theta(x-a)f(x)\,dx = \Theta(x-a)f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}}\Theta(x-a)\frac{d}{dx}f(x)\,dx =$$

$$= -\int_a^{\infty}\frac{d}{dx}f(x)\,dx = -f(x)\Big|_a^{\infty} = f(a) \Rightarrow \frac{d}{dx}\Theta(x-a) = \delta(x-a)$$

- viz doplněk 20
- $\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$ ... integrace přes objem

$\Rightarrow$ plošné + lineární náboje : $\rho(\vec{r}\,') = \delta(n)\,\sigma(x,y)$ n... normálová souřadnice
$\rho(\vec{r}\,') = \delta(n_1)\,\delta(n_2)\,\eta(x)$