

Cvičení 2: Formalismus QM - procvičení na spinu 1/2.

Motivace: Vyzkoušet si postup aplikace základních axiomů kvantové teorie na příkladu částice se spinem 1/2, tj. ve dvourozměrném stavovém prostoru.

Úloha 1 - Pauliho matice

Uvažujete matice

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní vektory a vlastní čísla matic σ_x , σ_y , σ_z . Najděte oba projektory (\hat{P}_+ a \hat{P}_-) na vlastní podprostory každé z nich. Ověřte explicitně platnost "rozkladu jedničky" $\hat{P}_+ + \hat{P}_- = \hat{I}$. Rozložte vlastní vektory matice σ_y do báze vlastních vektorů matice σ_x .

Úloha 2

Operátor projekce spinu částice do směru

$$\vec{n} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \equiv (n_x, n_y, n_z)$$

definujeme jako

$$\hat{S}_n \equiv \vec{n} \cdot \vec{\hat{S}} = n_x \hat{S}_x + n_y \hat{S}_y + n_z \hat{S}_z.$$

Dosaďte do toho výrazu vyjádření \hat{S}_i pomocí Pauliho matic a najděte explicitní vyjádření \hat{S}_n jako matice v bázi $|z+\rangle$, $|z-\rangle$.

Poznámka: Vhodnou volbou úhlů θ a φ si ověřte správnost výsledku tak, že \hat{S}_n přejde na \hat{S}_x , \hat{S}_y a \hat{S}_z .

Úloha 3

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru \hat{S}_n z předchozí úlohy. Najděte projektory na vlastní podprostory. Pro ověření správnosti se zamyslete, jak by měla vypadat závislost spektra na úhlech θ a φ .

Nápověda: Nezávislost výsledku měření na orientaci přístroje!

Úloha 4

Jaké výsledky měření veličiny \hat{S}_n můžeme očekávat a s jakou pravděpodobností, pokud je systém připraven ve stavu a) $|\psi\rangle = |z+\rangle$, b) $|\psi\rangle = |x+\rangle$?