# Cvičení 8: Moment hybnosti.

*Motivace:* spřátelit se s kulovými funkcemi a posunovacími operátory

## Úloha 1: kulové funkce jako homogenní polynomy

Proveďte konstrukci sférických harmonik pomocí působení operátoru (orbitálního) momentu hybnosti v x-reprezentaci na homogenní harmonické polynomy.

Podrobný návod:

- Pro $l = 0$ je jediný homogenní polynom $p_0(x, y, z) = 1$. Stačí najít normalizační konstantu, aby $\int |Y_{00}|^2 d\Omega = 1$.
- Pro $l = 1$ lze obecný homogenní polynom napsat jako $p_1(x, y, z) = ax + by + cz$. Pro určení $Y_{11}$ můžeme použít podmínku $\hat{L}_+ Y_{11} = 0$, která opět určí koeficienty $a, b, c$ až na normalizaci.
- $Y_{10}$ a $Y_{1-1}$ potom dostanete působením operátoru $\hat{L}_-$
- Pro $l = 2$ lze obecný homogenní polynom napsat jako $p_2(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + \alpha yz + \beta xz + \gamma xy$. Zatímco polynomy $p_0$ a $p_1$ jsou automaticky harmonické (tj. $\Delta p_l = 0$), $p_2$ musí navíc splňovat $a + b + c = 0$. První harmoniku opět najdeme z podmínky $\hat{L}_+ Y_{22} = 0$ a normalizace. Ostatní opět posunovacím operátorem.
- Takto nalezené harmoniky ještě nemusí odpovídat standardním, které najdete v literatuře. Můžete ještě přenásobit celou sadu harmonik pro každé $l$ fázovým faktorem. Ten se obvykle volí tak, aby harmonika $Y_{l0}$ byla kladná na severním pólu, tj. pro $x = y = 0$, $z > 0$.

*Dodatečný námět k přemýšlení:* Místo explicitního vyjádření operátorů složek momentu hybnosti $\hat{L}_\alpha$ v souřadnicové reprezentaci, můžete k provedení postupu výše rovněž použít komutačních relací $[\hat{L}_\alpha, \hat{x}_\beta] = i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{x}_\gamma$ a faktu, že působení $\hat{L}_\alpha$ na funkci nezávisející na úhlech je 0. Místo polynomu $p_l(x, y, z)$ pak můžeme vzít operátorový výraz $p_l(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ působící na funkci $r^{-l}$. Jiná alternativa: v prostoru polynomů rovnou hledat vlastní funkce $\hat{L}_z$.

*Pro kontrolu:* Tabulka prvních několika sférických harmonik:

$$Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{33}=-\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\frac{(x+iy)^3}{r^3}$$

$$Y_{11}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x+iy}{r} \qquad Y_{32}=\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\frac{z(x+iy)^2}{r^3}$$

$$Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r} \qquad Y_{31}=-\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\frac{(4z^2-x^2-y^2)(x+iy)}{r^3}$$

$$Y_{1-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x+iy}{r} \qquad Y_{30}=\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\frac{z(2z^2-3x^2-3y^2)}{r^3}$$

$$Y_{22}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\frac{(x+iy)^2}{r^2} \qquad Y_{3-1}=\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\frac{(4z^2-x^2-y^2)(x-iy)}{r^3}$$

$$Y_{21}=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{z(x+iy)}{r^2} \qquad Y_{3-2}=\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\frac{z(x-iy)^2}{r^3}$$

$$Y_{20}=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{2z^2-x^2-y^2}{r^2} \qquad Y_{3-3}=\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\frac{(x-iy)^3}{r^3}$$

$$Y_{2-1}=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{z(x-iy)}{r^2}$$

$$Y_{2-2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\frac{(x-iy)^2}{r^2}$$

## Úloha 2: Měření $L$

Stav bezstrukturní částice ve 3D prostoru je dán pomocí vlnové funkce v souřadnicové reprezentaci

$$\psi(\vec{r}) = (x + y + 3z)f(r),$$

kde $f(r)$ je nějaká hladká funkce radiální souřadnice $r = |\vec{r}|$. Je to vlastní funkce operátoru $L^2$? Pokud ano jaká je hodnota $l$? Jaká je pravděpodobnost nalezení různých hodnot $m$.

*Nápověda:* Použijte výsledků předchozí úlohy. Uvědomte si, že pro působení operátoru momentu hybnosti je podstatná pouze závislost na úhlech, tj. násobení libovolnou funkcí $r$ neovlivní výsledek. Rozviňte funkci do sférických harmonik, o nichž víte že jsou vlastími funkcemi $\hat{L}_z$.

## Úloha 3: Kvadrupól v nehomogenním poli (DU z roku 2010)

Uvažujte systém (částici) s momentem hybnosti $l = 1$. Báze stavového prostoru tedy je dána například vlastními vektory operátoru $L_z$: $|1\rangle$, $|0\rangle$, $|-1\rangle$ s vlastními hodnotami $\hbar$, 0, $-\hbar$. Předpokládejte, že Hamiltonián tohoto systému je (podobné členy se vyskytují při popisu NMR)

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar}\left(\hat{L}_u^2 - \hat{L}_v^2\right), \tag{1}$$

kde $\hat{L}_u^2$ a $\hat{L}_v^2$ jsou operátory projekce momentu hybnosti na osy dané vektory

$$\vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_z\right), \qquad \vec{e}_v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_x - \vec{e}_z\right).$$

1. Napište matici Hamiltoniánu v bázi $|1\rangle$, $|0\rangle$, $|-1\rangle$ a najděte její vlastní hodnoty $E_1$, $E_2$, $E_3$ a příslušné stacionární stavy $|E_1\rangle$, $|E_2\rangle$, $|E_3\rangle$.

2. Jaký je časový vývoj stavu připraveného v čase $t = 0$:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |-1\rangle\right)?$$

3. Jaká by byla pravděpodobnost naměření různých hodnot $L_z$ v tomto stavu v čase $t$?

4. V čase $t$ provedeme měření $L_z^2$ a naměříme hodnotu $\hbar^2$. Jak bude vypadat stav po měření a jaký bude jeho další časový vývoj?

*Nápověda:* K sestavení matice Hamiltoniánu použijte relace

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x &= \tfrac{1}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-), \\
\hat{L}_y &= \tfrac{1}{2i}(\hat{L}_+ - \hat{L}_-), \\
\hat{L}_\pm|lm\rangle &= \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}|l\, m \pm 1\rangle
\end{aligned}$$