

Cvičení 11: Stacionární poruchová teorie.

Motivace: Praktické použití poruchové teorie, vlastnosti korekcí a srovnání s přesnými řešeními.

Úloha 1 - LHO v poli konstantní síly

Lineární harmonický oscilátor s hamiltoniánem

$$\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

je vystaven působení síly konstantní velikosti s potenciálem $V(x) = \lambda x$, kde λ je reálná konstanta.

- Započtete tento člen poruchově a nalezněte korekci energie do druhého řádu v λ .
- Nalezněte přesné řešení porušeného problému a srovnajte s předchozím výpočtem. Co vás překvapí? Zdůvodněte.
- Nalezněte korekci vlnové funkce do prvního řádu a pokuste se je srovnat s přesnými.

Poznámka: Pro výpočty použijte formalismu kreačních a anihilačních operátorů.

Úloha 2 - porucha ve dvoustavovém systému

V dvouhladinovém systému mějme operátory

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{pmatrix}.$$

- Najděte přesně vlastní energie pro hamiltonián $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$.
- Uvažujte \hat{H}_1 jako malou poruchu k \hat{H}_0 a najděte energie do 2.řádu poruchové teorie.
- Totéž, ale pomocí Brillouine-Wignerovy teorie.
- Diskutujte výsledky a porovnejte poruchová řešení s přesným.

Úloha 3 - Izotropní LHO ve dvou dimenzích a kvadrupólová porucha

Uvažujme částici ve dvourozměrném potenciálu $V(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$, tj. dvourozměrný lineární harmonický oscilátor s vlastní frekvencí $\omega = \sqrt{k/m}$.

- Zopakujte si, jak vypadá energetické spektrum takového oscilátoru a jak se konstruují stacionární stavy pomocí kreačních operátorů $\hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y^\dagger$.
- Zjistěte, jak se v prvním řádu poruchové teorie změní energie prvních dvou energetických hladin pod vlivem poruchy $\hat{H}_I = \lambda m \omega x y$.
- Najděte přesné energie porušeného systému a přesvědčte se, že poruchový výpočet byl správný.

Poznámka: Pro přesné řešení proveďte otočení souřadného systému do nových souřadnic $q_{1,2} = (x \pm y)/\sqrt{2}$ a separujte systém na dva jednorozměrné LHO.

Úloha 4 - třístavový systém dle (Sakurai)

Uvažujte hamiltonián

$$H = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & a \\ 0 & e_1 & b \\ a^* & b^* & e_2 \end{pmatrix},$$

kde a, b jsou malá reálná čísla, $E_2 > E_1$ a $|a|, |b| \ll E_2 - E_1$. Pokuste se zahrnout členy úměrné a, b pomocí poruchové teorie do druhého řádu (oproti přednášce nedojde k sejmutí degenerace v prvním řádu, musíte vymyslet jak použít druhý řád). Zkontrolujte výsledek srovnáním s přesným řešením.