Bonusové cvičení 11.12.2024: Skládání více momentů hybnosti

Interakce tří částic se spinem $\frac{1}{2}$ je popsaná hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar}\left(2\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)} + 2\vec{S}^{(2)}\cdot\vec{S}^{(3)} - \vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(3)}\right).$$

Najděte stacionární stavy systému. V čase $t=0$ je systém připraven ve stavu $|\psi(0)\rangle = |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle_2 |\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle_3 \equiv |-++\rangle$. Najděte časovou závislost pravděpodobnosti nalezení hodnoty $-\frac{1}{2}\hbar$ pro S_z třetí částice.

a) Ukažte, že hamiltonián komutuje se složkami operátoru celkového spinu $\vec{S} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)} + \vec{S}^{(3)}$ a také s kvadrátem operátoru $\vec{S}^{(13)} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(3)}$.

b) Najděte společné vlastní vektory operátorů $|\vec{S}^{(13)}|^2$ a $\hat{S}_z^{(13)}$ (příslušná vlastní čísla označme j, m) a z nich zkonstruujte vlastní vektory operátoru $\hat{S}^2$ a $\hat{S}_z$ (s vlastními čísly J, M).

c) Vlastní hodnoty $\hat{H}$ vyjádřete pomocí J, M, j, m.

d) Vektor $|-++\rangle$ napište jako lineární kombinaci stacionárních stavů a najděte jeho časový vývoj.

a) $[\hat{H}, \vec{S}] = \frac{\omega}{\hbar}\left([2\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)}, \vec{S}] + [2\vec{S}^{(2)}\cdot\vec{S}^{(3)}, \vec{S}] - [\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(3)}, \vec{S}]\right)$

víme, že $2\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)} = |\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}|^2 - |\vec{S}^{(1)}|^2 - |\vec{S}^{(2)}|^2 = |\vec{S}^{(12)}|^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2$

$\vec{S} = \vec{S}^{(12)} + \vec{S}^{(3)}$

tedy $[2\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)}, \vec{S}] = [|\vec{S}^{(12)}|^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2, \vec{S}^{(12)} + \vec{S}^{(3)}] = \boxed{0}$

(operátor $\vec{S}^{(3)}$ působí na jinou částici / podprostor než $\vec{S}^{(12)}$)

podobně pro ostatní členy $\Rightarrow [\hat{H}, \vec{S}] = 0$

$$[\hat{H}, |\vec{S}^{(13)}|^2] = \frac{\omega}{\hbar}\left([2\vec{S}^{(2)}\cdot(\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(3)}), |\vec{S}^{(13)}|^2] - [\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(3)}, |\vec{S}^{(13)}|^2]\right)$$

$$= \frac{\omega}{\hbar}\left([2\vec{S}^{(2)}\cdot\vec{S}^{(13)}, |\vec{S}^{(13)}|^2] - \frac{1}{2}[|\vec{S}^{(13)}|^2 - \underbrace{|\vec{S}^{(1)}|^2}_{\frac{3}{4}\hbar^2} - \underbrace{|\vec{S}^{(3)}|^2}_{\frac{3}{4}\hbar^2}, |\vec{S}^{(13)}|^2]\right) = \boxed{0}$$

0 (jiný podprostor) 0 (složka & kvadrát)

b) Možné hodnoty j z trojúhelníkové nerovnosti: $j = |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|, \dots, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \in \{0, 1\}$

Nejprve $j=1$ ... mezní projekce lze ~~ze~~ separované báze získat jediným způsobem:

$$\boxed{|1,+1\rangle = |+\rangle_1 |+\rangle_3, \quad |1,-1\rangle = |-\rangle_1 |-\rangle_3}$$

... zbývající stav získáme např. aplikací $\hat{S}_-^{(13)} = \hat{S}_-^{(1)} + \hat{S}_-^{(3)}$ na stav $|1,+1\rangle$:

$\alpha_{lm}^{(-)} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}$

$\alpha_{ll}^{(-)} = \sqrt{2l}$

$$\hat{S}_-^{(13)}|1,+1\rangle = \alpha_{11}^{(-)}|1,0\rangle = \sqrt{2}\,|1,0\rangle$$

$$(\hat{S}_-^{(1)} + \hat{S}_-^{(3)})|+\rangle_1|+\rangle_3 = \alpha_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{(-)}|-\rangle_1|+\rangle_3 + \alpha_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{(-)}|+\rangle_1|-\rangle_3$$

$$= |-\rangle_1|+\rangle_3 + |+\rangle_1|-\rangle_3$$

$$\Rightarrow \boxed{|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_3 + |-\rangle_1|+\rangle_3\right)}$$

Nyní $j=0$ ... musí být $\perp |1,0\rangle$, takže: $\boxed{|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_3 - |-\rangle_1|+\rangle_3\right)}$

Možné hodnoty J z trojúhelníkové nerovnosti: $J = |j-\frac{1}{2}|, \dots, j+\frac{1}{2}$

↳ $j=0$: $J=\frac{1}{2}$ stavy: $|(0)\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$

↳ $j=1$: $J\in\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\}$ stavy: $|(1)\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$, $|(1)\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$, $|(1)\frac{3}{2},\pm\frac{3}{2}\rangle$

(Celkem 8 stavů, což odpovídá $2\times2\times2$ separovaným bázovým stavům.)

Nejprve $j=0$, $J=\frac{1}{2}$ ... jediná realizace: $|(0)\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle = |00\rangle_{13}|\pm\rangle_2$

$$\Rightarrow |(0)\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_3 - |-\rangle_1|+\rangle_3\right)|\pm\rangle_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} |(0)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|++-\rangle - |-++\rangle\right) \\ |(0)\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+--\rangle - |--+\rangle\right) \end{aligned}}$$

Nyní $j=1$, $J=\frac{3}{2}$ ... opět jediná realizace pro stav s maximální projekcí:

$$|(1)\tfrac{3}{2},\pm\tfrac{3}{2}\rangle = |1,\pm1\rangle_{13}|\pm\rangle_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} |(1)\tfrac{3}{2},+\tfrac{3}{2}\rangle &= |+++\rangle \\ |(1)\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle &= |---\rangle \end{aligned}}$$

↳ menší projekce pomocí posunovacího operátoru $\hat{S}_- = \hat{S}_-^{(13)} + \hat{S}_-^{(2)}$:

$$\hat{S}_-|(1)\tfrac{3}{2},+\tfrac{3}{2}\rangle = \alpha^{(-)}_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}|(1)\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{3}\,|(1)\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\left(\hat{S}_-^{(13)} + \hat{S}_-^{(2)}\right)|1,+1\rangle_{13}|+\rangle_2 = \alpha^{(-)}_{11}|1,0\rangle_{13}|+\rangle_2 + \alpha^{(-)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}|1,+1\rangle_{13}|-\rangle_2$$

$$= \sqrt{2}\,|1,0\rangle_{13}|+\rangle_2 + |1,+1\rangle_{13}|-\rangle_2$$

$$\Rightarrow |(1)\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1,0\rangle_{13}|+\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,+1\rangle_{13}|-\rangle_2$$

podobně: $|(1)\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,0\rangle_{13}|-\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,-1\rangle_{13}|+\rangle_2$

zpětným dosazením:

$$\boxed{\begin{aligned} |(1)\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+-+\rangle + |++-\rangle + |-++\rangle\right) \\ |(1)\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|-+-\rangle + |--+\rangle + |+--\rangle\right) \end{aligned}}$$

Konečně $j=1$, $J=\frac{1}{2}$ ... získáme např. z ortogonality

$$|(1)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1,+1\rangle_{13}|-\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle_{13}|+\rangle_2$$

$$|(1)\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1,-1\rangle_{13}|+\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle_{13}|-\rangle_2$$

a zpětným dosazením:

$$\boxed{\begin{aligned} |(1)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2|+-+\rangle - |++-\rangle - |-++\rangle\right) \\ |(1)\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2|-+-\rangle - |--+\rangle - |+--\rangle\right) \end{aligned}}$$

(Alternativně můžeme hledat $|(1)\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle = A\,|1,+1\rangle_{13}|-\rangle_2 + B\,|1,0\rangle_{13}|+\rangle_2$. Zapůsobením $\hat{S}_+$ dostaneme nalevo nulu, takže zapůsobením $\hat{S}_+^{(13)} + \hat{S}_+^{(2)}$ napravo musíme taky dostat nulu. Spolu s požadavkem $|A|^2+|B|^2=1$ dostaneme soustavu rovnic pro A a B.)

c) $\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar}\left(2\vec{S}^{(2)}\cdot\left(\vec{S}^{(1)}+\vec{S}^{(3)}\right) - \vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(3)}\right)$

$= \frac{\omega}{\hbar}\left(2\vec{S}^{(2)}\cdot\vec{S}^{(13)} - \frac{1}{2}\left(|\vec{S}^{(13)}|^2 - |\vec{S}^{(1)}|^2 - |\vec{S}^{(3)}|^2\right)\right)$

$= \frac{\omega}{\hbar}\left(\underbrace{|\vec{S}|^2}_{\hbar^2 J(J+1)} - \underbrace{|\vec{S}^{(2)}|^2}_{\frac{3}{4}\hbar^2} - \underbrace{|\vec{S}^{(13)}|^2}_{\hbar^2 j(j+1)} - \frac{1}{2}|\vec{S}^{(13)}|^2 + \frac{1}{2}\underbrace{|\vec{S}^{(1)}|^2}_{\frac{3}{4}\hbar^2} + \frac{1}{2}\underbrace{|\vec{S}^{(3)}|^2}_{\frac{3}{4}\hbar^2}\right)$

$= \boxed{\hbar\omega\left(J(J+1) - \frac{3}{2}j(j+1)\right)}$ ... při působení na $|(j)JM\rangle$

d) Složené stavy obsahující počáteční stav jsou jen tři:

$|(0)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|++-\rangle - |-++\rangle\right)$

$|(1)\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+-+\rangle + |++-\rangle + |-++\rangle\right)$

$|(1)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2|+-+\rangle - |++-\rangle - |-++\rangle\right)$

$\Rightarrow \boxed{|-++\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|(1)\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|(1)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|(0)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle}$

Časový vývoj vlastních stavů:

$\hat{H}|(1)\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\omega\left(\tfrac{3}{2}\cdot(\tfrac{3}{2}+1) - \tfrac{3}{2}\cdot 1\cdot(1+1)\right) = \tfrac{3}{4}\hbar\omega$

$\hat{H}|(1)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\omega\left(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}+1) - \tfrac{3}{2}\cdot 1\cdot(1+1)\right) = -\tfrac{9}{4}\hbar\omega \quad \to e^{-iEt}$

$\hat{H}|(0)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\omega\left(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}+1) - \tfrac{3}{2}\cdot 0\cdot(0+1)\right) = \tfrac{3}{4}\hbar\omega$

$|-++\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}|(1)\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle e^{-\frac{3}{4}i\omega t} - \frac{1}{\sqrt{6}}|(1)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle e^{+\frac{9}{4}i\omega t} - \frac{1}{\sqrt{2}}|(0)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle e^{-\frac{3}{4}i\omega t}$

$= e^{-\frac{3}{4}i\omega t}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}|(1)\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|(1)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle e^{3i\omega t} - \frac{1}{\sqrt{2}}|(0)\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle\right]$

$= e^{-\frac{3}{4}i\omega t}\Big[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+-+\rangle + |++-\rangle + |-++\rangle\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2|+-+\rangle - |++-\rangle - |-++\rangle\right)e^{3i\omega t}$

$- \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|++-\rangle - |-++\rangle\right)\Big]$

$= e^{-\frac{3}{4}i\omega t}\left[|++-\rangle\underbrace{\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}e^{3i\omega t} - \tfrac{1}{2}\right)} + |+-+\rangle\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}e^{3i\omega t}\right) + |-++\rangle\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}e^{3i\omega t} + \tfrac{1}{2}\right)\right]$

$\Rightarrow p\left(s_z^{(3)} = -\tfrac{\hbar}{2}\right) = \left|\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}e^{3i\omega t} - \tfrac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{36}\left|e^{3i\omega t} - 1\right|^2$

$= \frac{1}{36}\left(1 + 1 - 2\,\mathrm{Re}\, e^{3i\omega t}\right)$

$= \boxed{\frac{1}{18}\left(1 - \cos 3\omega t\right)}$