Cvičení 1: Lineární algebra a formalismus QM.

Motivace: Zopakovat si některé operace z lineární algebry (základní axiomy lineárních vektorových prostorů se skalárním součinem a definice základních operací s lineárními operátory) a naučit se používat Diracův formalismus bra- a ket-vektorů. Uvědomit si, že na konečných prostorech (dimeze D) lze bra vektory $\langle\psi|$ chápat jako řádkové vektory (matice $1 \times D$), ket vektory $|\psi\rangle$ jako sloupcové vektory (matice $D \times 1$) a operátory jako matice $D \times D$ a veškeré operace s nimi (působení operátoru na vektor, skalární součin, vnější součin) lze interpretovat jako maticové násobení. Přechod od ket vektoru k bra je pak vlastně hermitovské sdružení.

Úloha 1 - hermitovské sdružení

Z definice sdruženého operátoru $\boxed{\langle \hat{A}^\dagger \phi|\psi\rangle = \langle\phi|\hat{A}\psi\rangle, \forall\phi, \psi}$ dokažte, že

a) $(c\hat{A})^\dagger = c^*\hat{A}^\dagger$,

b) $(\hat{A}+\hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger$,

c) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$,

d) $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = A$,

e) $(|u\rangle\langle v|)^\dagger = |v\rangle\langle u|$,

rozmyslete, že platí pro matice + zkuste vybrané dvě relace dokázat pro operátory z def

kde $\hat{A}$, $\hat{B}$ jsou lineární operátory, c komplexní číslo a u, v vektory.
Poznámky: Pro důkazy tvrzení a), b) a e) potřebujete navíc linearitu (resp. antilinearitu) skalárního součinu v prvním (resp. ve druhém) argumentu, pro b) definici součtu operátorů a pro e) definici vnějšího součinu. Nakonec si zkuste promyslet, jak by vypadaly důkazy uvedených tvrzení ve speciálním případě, kdy A, B jsou konečné čtvercové matice a $|u\rangle$, $|v\rangle$ sloupcové a $\langle u|$, $\langle v|$ řádkové vektory čísel.

Úloha 2 - hermitovské operátory

Nechť $\hat{L}$ je libovolný lineární a $\hat{A}$, $\hat{B}$ jsou hermitovské lineární operátory a $|v\rangle$ je vektor. Pak jsou operátory

a) $\hat{L}^\dagger\hat{L}$,

b) $\hat{L}\hat{L}^\dagger$,

c) $\hat{L}+\hat{L}^\dagger$,

d) $i(\hat{L}-\hat{L}^\dagger)$

e) $\hat{L}\hat{A}\hat{L}^\dagger$,

f) $i[\hat{A},\hat{B}] \equiv i(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})$,

g) $\{\hat{A},\hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}$,

h) $|v\rangle\langle v|$

hermitovské.
Nápověda: Použijte pravidla odvozená výše.

Úloha 3 - rozklad operátoru

výběrová úloha. Jen když budete mít ten správný nápad

Ukažte, že každý lineární operátor lze psát jako $\hat{L} = \hat{A} + i\hat{B}$, kde $\hat{A}$, $\hat{B}$ jsou hermitovské.
Nápověda: Použijte výsledků předchozího cvičení.
Poznámka: Části $\hat{A}$ a $i\hat{B}$ se nazývají hermitovskou a antihermitovskou částí operátoru $\hat{L}$.

Úloha 4 - rovnost operátorů

Nechť je $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$, $\forall\psi$. Ukažte, že pak je $\langle\phi_1|\hat{A}|\phi_2\rangle = \langle\phi_1|\hat{B}|\phi_2\rangle$, $\forall\phi_1, \phi_2$, tj $\hat{A} = \hat{B}$.
Nápověda: Aplikujte předpoklad úlohy na vektory $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle$ a $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle + i|\phi_2\rangle$.

Úloha 5 - Pauliho matice

Nechť $\hat{A}$, $\hat{B}$ jsou matice. Dokažte, že $(\hat{A}, \hat{B}) = \mathrm{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})$ splňuje axiomy skalárního součinu. Uvažujte dále matice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že tyto matice tvoří ortogonální systém vůči tomuto skalárnímu součinu. Ukažte dále, že každou matici 2×2 lze napsat jako lineární kombinaci těchto matic. Najděte vzorce pro výpočet koeficientů této lineární kombinace.

Úloha 6 - diagonalizace matic

Najděte vlastní vektory a vlastní čísla matic σ_x, σ_y, σ_z z předchozí úlohy. Najděte oba projektory ($\hat{P}_+$ a $\hat{P}_-$) na vlastní podprostory každé z nich. Ověřte explicitně platnost "rozkladu jedničky" $\hat{P}_+ + \hat{P}_- = \hat{I}$. Rozložte vlastní vektory matice σ_y do báze vlastních vektorů matice σ_x.

Úloha 7 - neortogonální báze

výběrová úloha pro zájemce

Nechť $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^N$ je množina lineárně nezávislých vektorů v lineárním vektorovém prostoru dimenze N a nechť $S_{ij} = \langle\phi_i|\phi_j\rangle$ (tzv. Gramova matice). Připomeňte si jaká je podmínka lineární nezávislosti vektorů ϕ_i vyjádřená pomocí matice S. Najděte vyjádření koeficientů c_i v rozkladu vektoru $|\psi\rangle = \sum c_i|\phi_i\rangle$ pomocí skalárních součinů $\langle\phi_i|\psi\rangle$. Vyjádřete skalární součin dvou vektorů $|\psi\rangle$, $|\psi'\rangle$ pomocí jejich komponent $\langle\phi_i|\psi\rangle$. Pomocí těchto komponent vyjádřete také výsledek působení operátoru $\hat{A}$ na vektor $|\psi\rangle$ (budete potřebovat ještě komponenty operátoru $\langle\phi_i|\hat{A}|\phi_j\rangle$).

Nápověda: Nejlepší je nejdříve najít vyjádření jednotkového operátoru ve tvaru $\hat{I} = \sum_{ij} a_{ij}|\phi_i\rangle\langle\phi_j|$ ("rozklad jedničky") a ten pak vždy vkládat na vhodné místo hledaného výrazu. Koeficienty a_{ij} najdete z podmínky $\hat{I}|\phi_k\rangle = |\phi_k\rangle$.

Souvislosti: Nepřipomíná vám to kovariantní a kontravariantní složky vektorů z diferenciální geometrie resp. z obecné teorie relativity?