QM-I-2014

8. 10.

Cvičení 2: Formalismus QM - procvičení na spinu 1/2.

Motivace: Vyzkoušet si postup aplikace základních axiomů kvantové teorie na příkladu částice se spinem 1/2, tj. ve dvourozměrném stavovém prostoru.

Úloha 1

Operátor projekce spinu částice do směru

$$\vec{n} = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta) \equiv (n_x, n_y, n_z)$$

definujeme jako

$$\hat{S}_n \equiv \vec{n} \cdot \vec{\hat{S}} = n_x \hat{S}_x + n_y \hat{S}_y + n_z \hat{S}_z.$$

Dosaďte do toho výrazu vyjádření $\hat{S}_i$ pomocí Pauliho matic a najděte explicitní vyjádření $\hat{S}_n$ jako matice v bázi $|z+\rangle$, $|z-\rangle$.

Poznámka: Vhodnou volbou úhlů θ a φ si ověřte správnost výsledku tak, že $\hat{S}_n$ přejde na $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ a $\hat{S}_z$.

Úloha 2

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru $\hat{S}_n$ z předchozí úlohy. Pro ověření správnosti se zamyslete, jak by měla vypadat závislost spektra na úhlech θ a φ.

Nápověda: Nezávislost výsledku měření na orientaci přístroje!

Úloha 3

Jaké výsledky měření veličiny $\hat{S}_n$ můžeme očekávat a s jakou pravděpodobností, pokud je systém připraven ve stavu a) $|\psi\rangle = |z+\rangle$, b) $|\psi\rangle = |x+\rangle$?

Vzor. řešení:

$\boxed{U1}$ $$S_n = \left\{ \cos\varphi \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\varphi \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \frac{\hbar}{2} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$\boxed{U2}$ $$-(\cos\theta - \lambda)(\cos\theta + \lambda) - \sin^2\theta = 0 \quad \text{tj} \quad \lambda^2 = 1 \quad \rightarrow S_n < \pm \frac{\hbar}{2}$$

vl. v. $(\cos\theta - 1)\, a + \sin\theta\, e^{-i\varphi}\, b = 0$

tj $|n+\rangle \sim \begin{pmatrix} \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix} = |\psi\rangle$ normování $\langle\psi|\psi\rangle = \sin^2 + 1 + \cos^2 - 2\cos\theta$

$= 2(1 - \cos\theta)$

$|n+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sin\theta\, e^{-i\varphi}}{\sqrt{1-\cos\theta}} \\ \sqrt{1-\cos\theta} \end{pmatrix}$ dá se zjednodušit $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{-i\varphi} \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \ldots \end{pmatrix}$ Hezčí: $\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \ldots \end{pmatrix}$

z podmínky $\langle n-|n+\rangle = 0$ najdeme $|n-\rangle = \begin{pmatrix} b^* \\ -a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

$\boxed{U3}$ • a) $p(n+) = |a|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$ $p(n-) = |b|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}$

... ověření .. pro $\theta = 0$ .. $|n+\rangle = |z+\rangle$

• b) $p(n+) = |\langle n+|x+\rangle|^2$ ... $|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle + |z-\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} + \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \sin\theta\cos\varphi\right] = \frac{1}{2}\left[1 + n_x\right] \checkmark$$

... to čekáme – musí záviset jen na n_x (úhel mezi $\vec{n}$ a osou x)

• $p(n-) = |\langle n-|x+\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\right)\left(\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \sin\theta\cos\varphi\right]$$

• ověření normalizace .. $p(n+) + p(n-) = 1$ ✓

• pro n mířící do osy x: $\varphi = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ $p(n+) = 1$ ✓