VZOROVÉ ŘEŠENÍ

$\boxed{U1}$ ① uspořádat bázi $|s_z^{(1)} s_z^{(2)}\rangle \rightarrow \{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$

platí: $S_z|++\rangle = \hbar|++\rangle \quad S_z|--\rangle = \hbar|--\rangle \quad S_z|+-\rangle = S_z|-+\rangle = 0$

$P|++\rangle = |++\rangle \quad P|--\rangle = |--\rangle \quad P|+-\rangle = |-+\rangle \quad P|-+\rangle = |+-\rangle$

tj. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad [P,S]=0$ lze ověřit a nebo maticově

Lze též psát obecně, např. $SP|s_1 s_2\rangle = S|s_2 s_1\rangle = \hbar(s_1+s_2)|s_2 s_1\rangle$

② Společná báze $|++\rangle = |S=\hbar, P=1\rangle$ a $|--\rangle = |S=-\hbar, P=1\rangle$ už jsou vl. vektory

v podprostoru $S=0$ nutno diagonalizovat $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nebo

rovnou nahlédnout: $|SP\rangle: \quad |0\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt2}(|+-\rangle + |-+\rangle)$

$|0\,{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt2}(|+-\rangle - |-+\rangle)$

Rozebrat 3 způs. popisu

$\boxed{U2}$ a) $|\psi\rangle = |+\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt2}(|+\rangle + |-\rangle) = \frac{1}{\sqrt2}(|++\rangle + |+-\rangle) = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

vl. v. $S_z^{(2)}$ $\begin{cases} +\frac{\hbar}{2}: |++\rangle, |-+\rangle \;..\; P_+ = |++\rangle\langle++| + |-+\rangle\langle-+| \\ -\frac{\hbar}{2}: |+-\rangle, |--\rangle \;..\; P_- = |+-\rangle\langle+-| + |--\rangle\langle--| \end{cases}$ ① způsob

$|\psi\rangle \rightarrow P|\psi\rangle \equiv |\psi'\rangle \quad \frac{1}{\sqrt2}|++\rangle \quad \frac{1}{\sqrt2}|+-\rangle$

$p = \|\psi'\| = \begin{cases} \frac12 \\ \frac12 \end{cases}$

alternativa: uvědomit si $P_+ = I \otimes |+\rangle\langle+| \quad |\psi\rangle \rightarrow |+\rangle\otimes|+\rangle \quad p=\frac12$

$P_- = I \otimes |-\rangle\langle-| \quad |\psi\rangle \rightarrow |+\rangle\otimes|-\rangle \quad p=\frac12$

② způsob

b) <u>měření $S_x^{(1)}$ pak teprve $S_z^{(2)}$</u>

výsledek 1. měření:

$p=\frac12 \;..\; S_x = \frac{\hbar}{2} \rightarrow$ stav $|\psi'\rangle = \frac12(|+\rangle + |-\rangle)\otimes(|+\rangle + |-\rangle)$ další měření pomocí

$S_x = -\frac{\hbar}{2} \qquad |\psi'\rangle = \frac12(|+\rangle - |-\rangle)\otimes(|+\rangle + |-\rangle)$

3. způsob

$\rightarrow$ výsledek 2. měření $\quad p_+ = p_- = \frac12 \rightarrow$ nezávisle

<u>alternativa:</u> maticově .. uvědomit si .. matice

$$\hat A \otimes \hat B = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & ++ & +- & -+ & -- \\ \hline ++ & a_{++}\cdot\hat B & & a_{+-}\cdot\hat B & \\ +- & & & & \\ -+ & a_{-+}\cdot\hat B & & a_{--}\cdot\hat B & \\ -- & & & & \end{array}$$

tj. $P_{x:+} = \frac12\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1\;1)\otimes I = \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\cdot\frac12 \qquad P_{x:-} = \begin{pmatrix} 1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&-1&0\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\frac12$

tj. 1. měření: $|\psi'\rangle = P_{x+}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \|\psi'\|^2 = \frac12$

$\ldots \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\ \ldots\end{pmatrix} = \frac{1}{\ldots}\begin{pmatrix}1\\1\\ \ldots\end{pmatrix} \quad \|\psi'\|^2 = \frac{1}{\ldots}$

2. měření: $P_+ = \begin{pmatrix}1&0&0&\\0&0&&\\&&1&0\\0&&0&0\end{pmatrix} \rightarrow \frac12\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ nebo $\frac12\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$

$P_- = \begin{pmatrix}0&&&\\&1&&\\ \ldots\end{pmatrix} \rightarrow \frac12\begin{pmatrix}0\\1\\ \ldots\end{pmatrix}$ nebo $\frac12\begin{pmatrix}0\\1\\ \ldots\end{pmatrix}$

$\boxed{13}$ $|\psi\rangle \approx (2|++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle)$ normování $\longrightarrow$ $\psi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

projektory pro měření $S_x^{(1)}$: $P_{x+} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_{x-} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$S_z^{(2)}$: $P_+ = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $P_- = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

---

a)

měř $S_z^{(2)}$

$\oplus$ $P_+|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\|\psi'\|^2 = \frac{5}{6} = p_+$

$\ominus$ $P_-|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $p_- = \frac{1}{6}$

---

b) dvojí měření

$S_x^{(1)}$

$\oplus$ $P_{x+}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[p_+ = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}]{\text{normování}} |\psi'\rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$S_z^{(2)}$:

$\oplus$ $P_+|\psi'\rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\bar{p}_+ = \frac{9}{10}$

$\ominus$ $P_-|\psi'\rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow \bar{p}_- = \frac{1}{10}$

$\ominus$ $P_{x-}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[p_- = \frac{1}{6}]{\text{normování}} |\psi'\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$S_z^{(2)}$:

$\oplus$ $P_+|\psi'\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\bar{p}_+ = \frac{1}{2}$

$\ominus$ $P_-|\psi'\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\bar{p}_- = \frac{1}{2}$

závěr: – výsledek 2. měření závisí na výsl. 1. měření

– když se nepodívám ... podmíněná p-st: $P_+ = p_+ \cdot \bar{p}_+ + p_- \bar{p}_+ = \frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

$P_- = p_+ \cdot \bar{p}_- + p_- \bar{p}_- = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\rightarrow$ stejný výsl. jako bez 1. měření

• projektorově (2. způs) $\rightarrow$ rozmyslet příští rok