QM-I-CV4 – vzorové řešení

ÚLOHA 1: $\hat{R} = \sum_{m=0}^{N-1} |m+1\rangle\langle m|$

- $\hat{R}|n\rangle = \sum_{m=0}^{N-1} |m+1\rangle\underbrace{\langle m|n\rangle} = \sum_{m=0}^{N-1} |m+1\rangle\, \delta_{mn} = |n+1\rangle$

  ortogonalita $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$

- $\hat{R}^2|n\rangle = \hat{R}\left(\hat{R}|n\rangle\right) = \hat{R}|n+1\rangle = \hat{R}|n+2\rangle$

  užití předch. výsledku

- podobně $\hat{R}^k|n\rangle = |n+k\rangle$
- $\hat{R}^{-1}|n\rangle = ?$ ... platí $\hat{R}^{-1}\hat{R} = \hat{I}$ tj. $\hat{R}^{-1}\hat{R}|n\rangle = |n\rangle$ $\forall n$

  neboli $\hat{R}^{-1}|n+1\rangle = |n\rangle$ $\forall n$ tj. také pro $n = n-1$

  neboli $\hat{R}^{-1}|n\rangle = |n-1\rangle$ tj. platí i pro $k \le 0$

- unitarita: $\hat{R}^{+} = \left(\sum_m |m+1\rangle\langle m|\right)^{+} = \sum_m |m\rangle\langle m+1|$ substituce $m = m+1$

  $= \sum_m |m-1\rangle\langle m| = \hat{R}^{-1}$ ✓

  tj. normální operátor $[\hat{R}, \hat{R}^{+}] = \hat{R}\hat{R}^{-1} - \hat{R}^{-1}\hat{R} = \hat{I} - \hat{I} = 0$

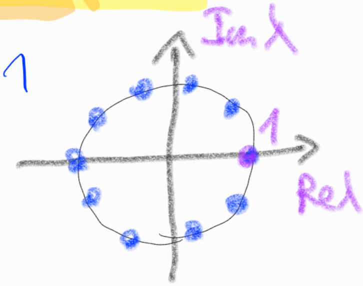
- vlastní vektory a vlastní čísla $\hat{R}$?

– VLASTNÍ ČÍSLA: (A) z charakteristické rovnice ...

matice $\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad |\lambda\hat{I} - \hat{R}| = \begin{vmatrix} \lambda & & & -1 \\ -1 & \lambda & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \Delta_N(\lambda)$

rozvoj dle 1. řádku: $\Delta_N = \lambda^N - 1 = 0$ tj. $\lambda^N = 1$

neboli $\boxed{\lambda_\ell = e^{ik_\ell}}$ $\boxed{k_\ell = \frac{2\pi}{N}\ell}$ $\ell = 0, 1, 2, \dots, N-1$



– VLASTNÍ VEKTORY: $|\psi^{(\ell)}\rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \psi_m^{(\ell)} |m\rangle$

$\hat{R}|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \psi_m^{(\ell)} |m+1\rangle = \lambda|\psi\rangle = \lambda \sum_{m=0}^{N-1} \psi_m^{(\ell)} |m\rangle$ (*)

projekce (*) na $\langle m|$: $\sum_{n=0}^{N-1} \psi_n^{(\ell)} \underbrace{\langle m|n+1\rangle}_{\delta_{m,n+1}} = \lambda \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n^{(\ell)} \underbrace{\langle m|n\rangle}_{\delta_{mn}}$

tj $\psi_{m-1}^{(\ell)} = \lambda \psi_m^{(\ell)}$ ... tj $\psi_0^{(\ell)}$ .. libovolná konst C a

$$\psi_m^{(\ell)} = \lambda^{-1} \psi_{m-1}^{(\ell)} = \lambda^{-2} \psi_{m-2}^{(\ell)} = \dots = \lambda^{-m} C$$

navíc periodická podm. $C = \psi_0^{(\ell)} = \psi_N^{(\ell)} = \lambda^{-N} C$

to je konzistentní s podm. $\lambda^N = 1$. současně to lze chápat jako alternativní způsob nalezení vl. čísel.

- NORMOVÁNÍ VLASTNÍCH VEKTORŮ

$1 = \langle \psi^{(\ell)} | \psi^{(\ell)} \rangle = \sum_m |\psi_m^{(\ell)}|^2 = \sum_m |c|^2 \, |\lambda_\ell|^{-2m}$ ale $|\lambda_\ell| = |e^{ik_\ell}| = 1$

tj $1 = \sum_m |c|^2 = N \cdot C^2 \implies C = \frac{1}{\sqrt{N}}$

ZÁVĚR: normované $\boxed{|\psi^{(\ell)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m e^{-ik_\ell m} |m\rangle}$, kde $\boxed{k_\ell = \frac{2\pi \ell}{N}}$ $\ell = 0, 1, .. N-1$

- vl. č. a vlastní vektory $\hat{A} = \frac{\hat{R} + \hat{R}^+}{2}$ a $\hat{B} = \frac{\hat{R} + \hat{R}^+}{2i}$;

podle přednášky vl. č. $\hat{A} = \text{Re}\, \lambda_\ell = \cos k_\ell$ vl. č. $\hat{B} = \text{Im}\, \lambda_\ell = \sin k_\ell$
a vl. vektory jsou $|\psi^{(\ell)}\rangle$

ÚLOHA 2 $\boxed{\hat{X} = \sum_n \cos \frac{2\pi n}{N} |n\rangle\langle n|}$, $\boxed{\hat{Y} = \sum_n \sin \frac{2\pi n}{N} |n\rangle\langle n|}$, $\boxed{\hat{Z} = \hat{X} + i \hat{Y}}$

- vl. č. a vl. v. očividně vl. v. jsou $|n\rangle$ (operátory diagon.)

a vl. č. $x = \cos \frac{2\pi n}{N}$ $y = \sin \frac{2\pi n}{N}$ $z = e^{\frac{2\pi i}{N}} = x + iy$

všimněte si .. $\hat{X}$ a $\hat{Y}$ mají spol. vl. v. $\implies [\hat{X}, \hat{Y}] = 0 \implies [\hat{Z}, \hat{Z}^+] = 0$

NORMÁLNÍ $\hat{Z}^+ = \hat{X} - i\hat{Y}$

- komutátory: $\{\hat{R}, \hat{A}, \hat{B}\}$ komutují každý s každým a podobně $\{X, Y, Z\}$ komutují každý s každým

z ostatních komutátorů odvodíme jen $[\hat{R}, \hat{Z}]$ ostatní podobně

$$[\hat{R}, \hat{Z}] = \left[\sum_n |n+1\rangle\langle n|, \sum_m e^{i\frac{2\pi m}{N}} |m\rangle\langle m|\right]$$

$$= \sum_n \sum_m e^{i\frac{2\pi m}{N}} \left(\delta_{nm} |n+1\rangle\langle m| - \delta_{n+1,m} |n\rangle\langle m|\right) =$$

$$= \sum_n e^{i\frac{2\pi n}{N}} |n+1\rangle\langle n| - \underbrace{\sum_m e^{i\frac{2\pi m}{N}} |m\rangle\langle m-1|}_{\text{subst. } m = n+1} = \underbrace{\sum_n e^{i\frac{2\pi n}{N}} \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{N}}\right) |n+1\rangle\langle n|}_{\neq 0}$$

ÚLOHA 3

$$\boxed{\hat{H} = \sum_n \left(\alpha |n\rangle\langle n| + \beta |n+1\rangle\langle n| + \beta |n\rangle\langle n+1|\right)}$$

- **Pokázat, že $\hat{A}, \hat{B}$ integrály pohybu:**

uvědomíme si, že $\hat{I} = \sum_n |n\rangle\langle n|$ (relace úplnosti)

tedy $\quad \hat{H} = \alpha \hat{I} + \beta (\hat{R} + \hat{R}^+) = \alpha \hat{I} + \beta (\hat{R} + \hat{R}^{-1}) = f(\hat{R})$

tj. $\hat{H}$ je funkcí $\hat{R}$ kde $f(x) = \alpha + \beta \left(x + \frac{1}{x}\right)$

tj. $[\hat{H}, \hat{R}] = 0 \quad$ podobně $[\hat{H}, \hat{R}^+] = [R, H]^+ = 0$

a tedy $[\hat{H}, \hat{A}] = [\hat{H}, \frac{\hat{R} + \hat{R}^+}{2}] = 0 \quad$ a podobně $[\hat{H}, \hat{B}] = 0$

tj. dle definice jsou to integrály pohybu

- **vlastní funkce a čísla H:**

$\hat{H}$ je funkcí $\hat{R}$ $\Rightarrow$ vl. v. jsou stejné .. $|\psi^{(e)}\rangle$

a vlastní čísla $\hat{H}$ ... $E_e = f(\lambda_e) = f(e^{ike}) = \alpha + \beta (e^{ike} + e^{-ike})$

tj. $\quad \boxed{E_e = \alpha + 2\beta \cos ke}$

• systém ve stavu $|n\rangle$ v čase $t=0$ + čas. vývoj

platí $|n\rangle = \sum_l \langle\psi^{(l)}|n\rangle\,|\psi^{(l)}\rangle$

↳ dle úlohy 1: $(\psi^{l}_{n})^{*} = \frac{1}{\sqrt{N}}\, e^{ik_l n}$

tj. $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l e^{ik_l n}\,|\psi^{(l)}\rangle$ ... v čase $t=0$

pro $t>0$: $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l e^{ik_l n}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_l t}\,|\psi^{(l)}\rangle$

pravděpodobnost nalezení částice v místě $|m\rangle$ pro $t>0$:

$$p_m \equiv |\langle m|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{N}\Big|\sum_l e^{ik_l n}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_l t}\,\underbrace{\langle m|\psi^{(l)}\rangle}_{\to\, e^{-ik_l m}}\Big|^2$$

$$\boxed{p_n = \frac{1}{N}\Big|\sum_l e^{-\frac{i}{\hbar}E_l t}\Big|^2 = \frac{1}{N}\Big|\sum_l \exp\Big(-\frac{2i\beta t}{\hbar}\cos k_l\Big)\Big|^2}$$

lze formulovat jako současné měření komut. (kompatibilních) pozorovatelných $\hat{X}, \hat{Y}$ při něm naměříme s touto pravděpodobností hodnoty

$$(x,y) = \Big(\cos\frac{2\pi n}{N},\ \sin\frac{2\pi n}{N}\Big)$$