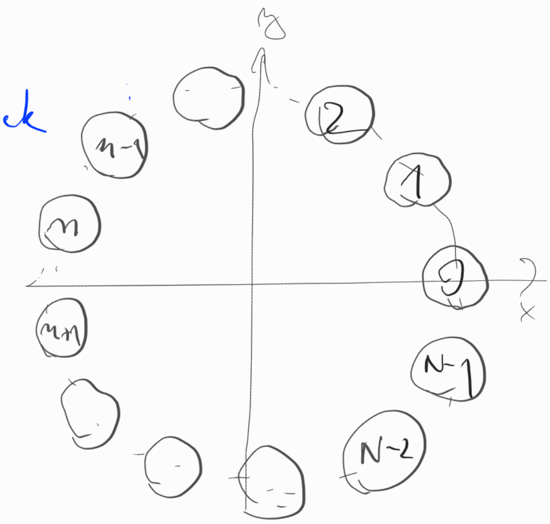
Cvičení 4: Kvantový kroužek .. časový vývoj

MOTIVACE: na příkladu kvant. teček dále procvičit formalismus včetně časového vývoje



KVANTOVÝ KROUŽEK: uvažujme N Q-teček rozmístěných do kroužku jako na obrázku v pravidelných intervalech úhlu $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$. Pro popis částice skákající mezi tečkami použijeme stavový prostor

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}\{|n\rangle;\ n=0,1,\dots,N-1\},$$

kde $|n\rangle$ popisuje stav, kdy částice je v tečce $|n\rangle$

Dále je vhodné zavést ztotožnění $|n+N\rangle \equiv |n\rangle$ takže např. $|0\rangle \equiv |N\rangle$; $|N+1\rangle \equiv |1\rangle$; $|-1\rangle \equiv |N-1\rangle$ atd.

Úloha 1: Definujme operátor $\hat{R} = \sum_{n=0}^{N-1} |n+1\rangle\langle n|$.

- Najděte $\hat{R}|n\rangle$; $\hat{R}^2|n\rangle$; $\hat{R}^k|n\rangle$; $\hat{R}^{-1}|n\rangle$
- Dokažte, že operátor $\hat{R}$ je unitární, tj. normální operátor.
- Najděte vlastní čísla a normované vl. vektory.
- Najděte vl. č. a vl. v. operátorů $\hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{R}+\hat{R}^\dagger)$ a $\hat{B} = \frac{1}{2i}(\hat{R}-\hat{R}^\dagger)$

Úloha 2: Definujme operátory $\hat{X} = \sum_n \cos\frac{2\pi n}{N}|n\rangle\langle n|$, $\hat{Y} = \sum_n \sin\frac{2\pi n}{N}|n\rangle\langle n|$, $\hat{Z} = \hat{X} + i\hat{Y}$.

- Pokuste se odvodit alespoň některé z komutačních relací mezi operátory $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}, \hat{R}, \hat{A}, \hat{B}$
- Jaké jsou vl. č. a vl. v. operátorů $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$

Úloha 3: Model těsné vazby: uvažujme operátor Hamiltoniánu

$$\hat{H} = \sum_n \left[\alpha|n\rangle\langle n| + \beta\big(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|\big)\right]$$

- Dokažte, že $\hat{A}, \hat{B}$ jsou integrály pohybu.
- Najděte vl. vektory a vl. č. $\hat{H}$

- V čase $t=0$ připravíme systém ve stavu $|\psi\rangle = |n\rangle$. Najděte pravděpodobnost, že v čase $t>0$ najdeme systém opět ve stavu $|n\rangle$. Popište jak lze tuto otázku formulovat jako otázku na měření $\hat{X}$ a $\hat{P}$.