$\boxed{\text{QM-I-cv5}}$ Vzorové řešení

ÚLOHA 1

• **působení operátorů $\hat{x}$ a $\hat{y}$:**

def.: $\hat{x} = d\cos\hat{\phi}$; $\hat{y} = d\sin\hat{\phi}$, kde $\hat{\phi}\psi(\varphi) = \varphi\,\psi(\varphi)$

(operátor násobení nezáv. proměnnou φ

operátor $\hat{\phi}$ je v bázi $|\varphi\rangle$ diagonální → funkce operátoru též diagonální ⇒

$$\hat{x}\psi(\varphi) = d\cos\varphi\,\psi(\varphi) \qquad \hat{y}\psi(\varphi) = d\cos\varphi\,\psi(\varphi)$$

• **spektrální rozklad:** dle přednášky →

$$\hat{\phi} = \int_0^{2\pi} d\varphi\ \varphi\,|\varphi\rangle\langle\varphi|$$

+ definice funkce operátoru →

$$\hat{x} = \int_0^{2\pi} d\varphi\,(d\cos\varphi)\,|\varphi\rangle\langle\varphi| \qquad \hat{y} = d\int_0^{2\pi} \sin\varphi\,|\varphi\rangle\langle\varphi|\,d\varphi$$

• **spektrum:** $\sigma_{\hat{\phi}} = (0, 2\pi)$ ⇒

$$\sigma_{\hat{x}} = d\cos(0,2\pi) = \langle -d, d\rangle \qquad \sigma_{\hat{y}} = d\sin(0,2\pi) = \langle -d, d\rangle$$

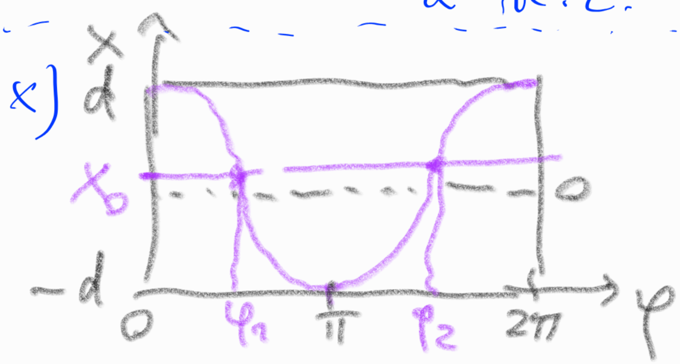
• **(zobecněné) vlastní vektory:**

vlastní vektor $|\varphi_0\rangle$ jemuž odpovídá vln. fce $\delta(\varphi-\varphi_0)$ odpovídá vl. číslu φ_0 operátoru $\hat{\phi}$ ⇒

stejný vektor odpovídá vl. č. $x_0 = d\cos(\varphi_0)$ operátoru $\hat{x}$

a vl. č. $y_0 = d\sin\varphi_0$ operátoru $\hat{y}$

⇒



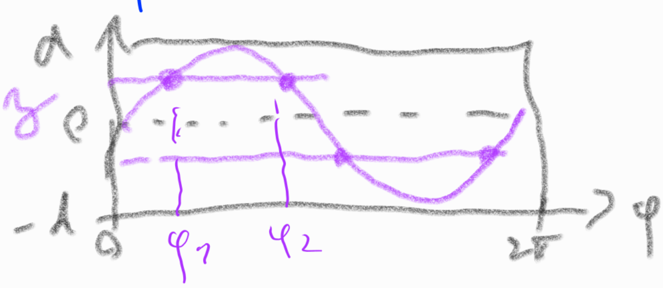
danému vl. č. $x_0 \in (-d, d)$ operátoru $\hat{x}$ odpovídají dva vl. vektory $|x_0, 1\rangle = \delta(\varphi - \varphi_1)$

$|x_0, 2\rangle = \delta(\varphi - \varphi_2)$

kde $\varphi_1 = \arccos(x_0/d)$

$\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$

y) podobně:



vl. č. $y_0 \in (-d,d)$ operátoru $\hat{y}$ odpovídají vl. v.

$$|y_0,1\rangle = \delta(\varphi-\varphi_1)$$
$$|y_0,2\rangle = \delta(\varphi-\varphi_2)$$
$$\varphi_1 = \arcsin(x_0/d) \qquad \varphi_2 = \pi - \varphi_1$$

přitom pokud $\varphi_i < 0$ ztotožníme jej s $\varphi_i + 2\pi$

$\boxed{\text{ÚLOHA 2}}$ – kompatibilita operátorů:

$\hat\phi, \hat x, \hat y, \hat L = -i\hbar\frac{d}{d\varphi}, \hat H = \frac{L^2}{2I}$ a $\hat P\psi(\varphi) = \psi(\varphi+\pi)$

pozn: operátor prostorové inver.

- $\hat\phi, \hat x, \hat y$ jsou $\forall$ kompatibilní, protože $\hat x, \hat y$ jsou fce $\hat\phi$
- $\hat L, \hat H, \hat P$ jsou $\forall$ navzájem kompatibilní: $\hat H$ je fce $\hat L$ a

$$[\hat L, \hat P]\psi(\varphi) = (\hat L\hat P - \hat P\hat L)\psi(\varphi) = \hat L\psi(\varphi+\pi) - \hat P[-i\hbar\psi'(\varphi)]$$
$$= -i\hbar(\psi'(\varphi+\pi) - \psi'(\varphi+\pi)) = 0 = [L,P]$$
$$[\hat H, \hat P] = \frac{1}{2I}[\hat L^2, \hat P] = \frac{1}{2I}(\hat L^2\hat P - \hat P\hat L\cdot\hat L) = \frac{1}{2I}[\hat L^2\hat P - \hat L\hat P\hat L] = 0$$

lze prohodit díky

- vzájemné komutátory obou skupin:

	$\hat L$	$\hat H$	$\hat P$
$\hat\phi$	$i\hbar\hat I$	$\hat L/I$	$-\pi\hat P$
$\hat x$	$-i\hbar\hat y$	$-i\hbar(\hat y\hat L + \hat L\hat y)$	$2\hat x\hat P$
$\hat y$	$i\hbar\hat x$	$i\hbar(\hat x\hat L + \hat L\hat x)$	$2\hat y\hat P$

↳ žádná kompatibilní dvojice

napíšu jen výsledky explicitně spočto pár reprezentativně níže

$$[f(\hat\phi), \hat L]\psi(\varphi) = -i\hbar\left(f(\hat\phi)\frac{d}{d\varphi} - \underbrace{\frac{d}{d\varphi}f(\varphi)\Big)\psi(\varphi)}_{\frac{d}{d\varphi}f\psi = f'\psi + f\psi'} =$$
$$= -i\hbar[\cancel{f(\varphi)\psi'(\varphi)} - f'(\varphi)\psi(\varphi) - \cancel{f(\varphi)\psi'(\varphi)}] = i\hbar f'(\varphi)\psi(\varphi)$$

tj. $\boxed{[f(\hat\phi), \hat L] = i\hbar f'(\hat\phi)}$

$[f(\hat\phi),\hat L^2] = fL^2 + (\underbrace{-LfL + LfL}_{0}) - L^2 f = \underbrace{[f,L]}_{i\hbar f'}L + L[f,L]$

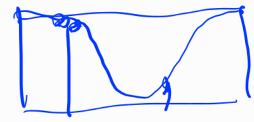
$= i\hbar(f'L + Lf')$

$[f(\hat\phi),\hat P]\psi(\varphi) = (f(\hat\phi)\hat P - \hat P f(\hat\phi))\psi(\varphi) = f(\hat\phi)\psi(\varphi+\pi) - \hat P f(\varphi)\psi(\varphi)$

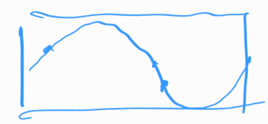
$= f(\varphi)\psi(\varphi+\pi) - f(\varphi+\pi)\psi(\varphi+\pi) = (f(\varphi)-f(\varphi+\pi))\psi(\varphi+\pi)$

tj $[f(\hat\phi),\hat P] = (f(\hat\phi)-f(\hat\phi+\pi))\hat P$

$\cos(\phi)-\cos(\phi+\pi) = 2\cos\phi$



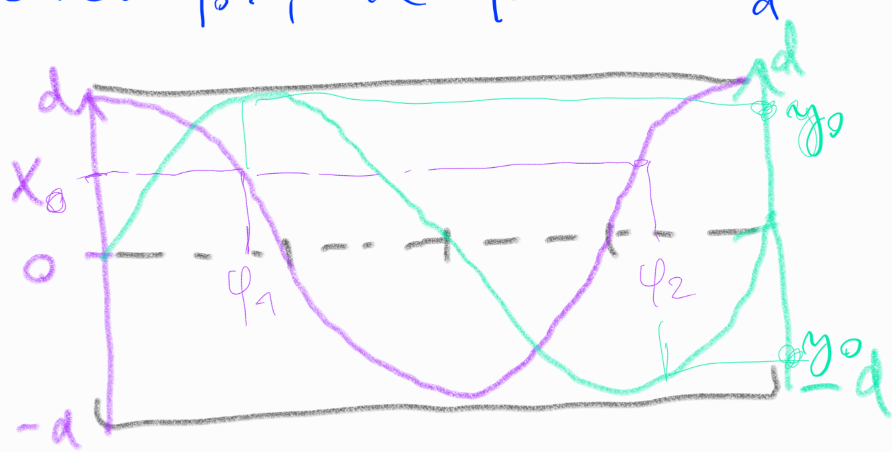
$\sin(\phi)-\sin(\phi+\pi) = 2\sin\phi$



ÚLOHA 3 je $\hat x$ ÚSKO? případně co přidat.

z úlohy 1 jsme viděli, že vl. č. x_0 odpovídají dva vl. v. $|\varphi_0\rangle$ a $|2\pi-\varphi_0\rangle$, kde $\varphi_0 = \arccos\frac{x_0}{d}$

tj není ÚSKO, ale z obrázku vidíme, že pro $|\varphi_0\rangle$ je $y_0 = d\sin\varphi_0 > 0$ a pro $|2\pi-\varphi_0\rangle$ je



$y_0 = d\sin(2\pi-\varphi_0) < 0$ a tedy za ÚSKO lze volit

$\{\hat x,\hat y\}$ ~ báze $\{\forall\, |x,y\rangle;$ kde $x\in(-d,d)$ a $y = \pm\sqrt{d^2-x^2}\}$

nebo jednodušeji zavedeme operátor znaménka $\hat y$

$\hat S = \hat y/|\hat y| = \mathrm{sign}(\pi-\hat\phi)$ tj ÚSKO $= \{\hat x,\hat S\}$

a příslušná báze $\{|x,s\rangle;\ x\in(-d,d);\ s=\pm1\}$

ÚLOHA 4 • vlastní čísla a vl. vektory $\hat{L}$

$\quad\quad\quad L_\ell \quad\quad\quad\quad\quad\quad \psi_\ell(\varphi)$

splňují: $\hat{L}\psi_\ell(\varphi) = -i\hbar\,\psi_\ell'(\varphi) = \ell\,\psi_\ell(\varphi)$

zavedeme bezrozměrné $m \equiv \ell/\hbar$ pak $-i\psi_\ell' = m\psi_\ell$

řešení je $\psi_\ell = \exp\{im\varphi\}$

navíc musí být $\psi_\ell(\varphi)$ periodická, jinak by byl mezi body $\varphi=0$ a $\varphi=2\pi$ skok a jeho derivace vznikne δ-fce.

tato podmínka dá: $\psi_\ell(0) = e^0 = \psi(2\pi) = e^{im2\pi}$

neboli $m\in\mathbb{Z}$ je libovolné celé číslo

ZÁVĚR: $\sigma(\hat{L}) = \{\ell;\ \ell=\hbar m;\ m\in\mathbb{Z}\}$

a příslušná vl. fce $\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$

přidali jsme kvůli normování

$$\int_0^{2\pi} |\psi_m|^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\varphi}\cdot e^{-im\varphi}\, d\varphi = 1$$

• relace úplnosti v této bázi:

trochu přeznačím: $\psi_m(\varphi) \equiv \langle\varphi|m\rangle$ tj $\hat{L}|m\rangle = \hbar m|m\rangle$

relace úplnosti: $\hat{I} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |m\rangle\langle m|$ ← obložíme rovnici $\langle\varphi|\ (R)\ |\varphi'\rangle$

ověříme explicitně: $\delta(\varphi-\varphi') \overset{?}{=} \sum_m \underbrace{\langle\varphi|m\rangle}_{\psi_m(\varphi)}\underbrace{\langle m|\varphi'\rangle}_{\psi_m^*(\varphi')}$

tj $\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')}$ ← tuto sumu si najděte na wikipedii pod heslem $\boxed{\text{DIRAC COMB}}$ + uvážit podmínku $\varphi,\varphi'\in(0,2\pi)$

- převod funkce $\psi(\varphi)$ do báze $\{|m\rangle\}_{m=-\infty}^{\infty}$

↳ $\hat{L}$-reprezentace $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \vdots \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad c_m \equiv \langle m|\psi\rangle$$

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \sum_m \underbrace{\langle\varphi|m\rangle}_{\psi_m(\varphi)} \underbrace{\langle m|\psi\rangle}_{c_m}$$

$$\hat{I} = \sum |m\rangle\langle m|$$

tj.

$$\psi(\varphi) = \sum_m c_m \psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\varphi}$$

kde $c_m = \langle m|\psi\rangle = \int_0^{2\pi} \psi_m^*(\varphi)\psi(\varphi)d\varphi$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi}\psi(\varphi)d\varphi$$

poznáme v tom Fourierovu řadu

- vyjádření operátorů $\hat{x}$ a $\hat{y}$ v bázi $|m\rangle$

můžeme rovnou vypočíst $X_{mm'} \equiv \langle m|\hat{x}|m'\rangle$ apod.

nebo najít působení na bázi – např. $\hat{y}|m\rangle = \ldots$?

podrobněji: (ve φ-reprezentaci)

$$X_{mm'} = \langle m|\hat{x}|m'\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} d \underbrace{\cos\varphi}_{=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})} e^{im'\varphi} =$$

$$= \frac{d}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[e^{i\varphi(-m+1+m')} + e^{i\varphi(-m-1+m')}\right]d\varphi = \frac{d}{2}\left(\delta_{m\,m'+1} + \delta_{m\,m'-1}\right)$$

tj. $\hat{x}$ je v L-rep matice $\frac{d}{2}\begin{pmatrix} \ddots & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

nebo $\hat{y}|m\rangle = d \underbrace{\sin\varphi}_{\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} = \frac{d}{2i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{i(m+1)\varphi} - e^{i(m-1)\varphi}\right)$

$$= \frac{d}{2i}\left(|m+1\rangle - |m-1\rangle\right)$$

ÚLOHA 5 $\quad \hat{A}^+ = \hat{x} + i\hat{y} \qquad \hat{A} = \hat{x} - i\hat{y}$

- komutační relace: $[\hat{L},\hat{A}^+] = [\hat{L},\hat{x}] + i[\hat{L},\hat{y}] = +i\hbar\hat{y} - i\cdot i\hbar\hat{x}$

spočítali jsme v úloze 2 výše $\qquad = \hbar(\hat{x} + i\hat{y})$

neboli $[\hat{L},\hat{A}^+] = \hbar\hat{A}^+$ podobně $[\hat{L},\hat{A}] = -\hbar\hat{A}$

nebo sdružením $(\;)^+$

$-[\underbrace{\hat{L}^+}_{=\hat{L}},\hat{A}] = \hbar\hat{A}$

• vlastní vektory $|l\rangle$: $L|l\rangle = l|l\rangle$

(neboli $L|m\rangle = \hbar m|m\rangle$)

pak $L(A^+|l\rangle) = (A^+L + [L,A^+])|l\rangle = \hat{A}^+ l|l\rangle + \hbar A^+|l\rangle = (l+\hbar)A^+|l\rangle$

neboli $\hat{A}^+|l\rangle = \text{konst.}\,|l+\hbar\rangle$ (neboli $\hat{A}^+|m\rangle = \text{konst.}\,|m+1\rangle$)

• operátor $\hat{A}^+\hat{A}$?

přímo spočteme: $\hat{A}^+\hat{A} = (\hat{x}+i\hat{y})(\hat{x}-i\hat{y}) = \hat{x}^2+\hat{y}^2 + i\underbrace{[\hat{y}\hat{x}-\hat{x}\hat{y}]}_{\text{komutují (výše)} = 0}$

tj $\hat{A}^+\hat{A} = \hat{x}^2+\hat{y}^2 = d^2\underbrace{(\cos^2\hat{\phi}+\sin^2\hat{\phi})}_{\hat{I}} = d^2\hat{I}$

tj $\hat{A}^+\hat{A}$ je násobkem 1-operátoru tj komutuje se vším

• normovací konstanta v $A|l\rangle$

$\| A^+|l\rangle \|^2 = \langle l|A^+A|l\rangle = \langle l|d^2 I|l\rangle = d^2$

neboli $A|l\rangle = d|l-\hbar\rangle$ neboli $A|m\rangle = d|m-1\rangle$

podobně $A^+|l\rangle = d|l+\hbar\rangle$ a $A|m\rangle = d|m+1\rangle$

• vyjádření operátorů $\hat{x}$ a $\hat{y}$ v bázi $|m\rangle$

vlastně už jsme to našli v úloze 4, ale tam jsme to spočetli přímo. Zde algebraicky podobně jako v LHO

platí $\left.\begin{aligned}\hat{A}^+ &= \hat{x}+i\hat{y}\\ \hat{A} &= \hat{x}-i\hat{y}\end{aligned}\right\} \longleftrightarrow \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(A+A^+)\\ y &= \frac{1}{2i}(A^+-A)\end{aligned}$

tedy $\langle m'|\hat{x}|m\rangle = \frac{1}{2}\langle m'|(A+A^+)|m\rangle = \frac{d}{2}\left(\langle m'|m-1\rangle + \langle m'|m+1\rangle\right) = \frac{d}{2}\left(\delta_{m',m-1}+\delta_{m',m+1}\right)$

$\langle m'|\hat{y}|m\rangle = \frac{1}{2i}\langle m'|A^+-A|m\rangle = \frac{d}{2i}\left(\langle m'|m+1\rangle - \langle m'|m-1\rangle\right) = \frac{d}{2i}\left(\delta_{m',m+1}-\delta_{m',m-1}\right)$