Cvičení 7: Lineární harmonický oscilátor.

Úloha 1: závislost výchylky na čase

Mějme lineární harmonický oscilátor s hmotností m a s vlastní úhlovou frekvencí ω připravený ve stavu

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

kde $|n\rangle$ jsou vlastní vektory $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ se standardní fázovou konvencí (tj. $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$).

1. Najděte α, β pro něž je střední hodnota $\langle\hat{X}\rangle$ operátoru polohy maximální.
2. Najděte časovou závislost této veličiny v tomto stavu.
3. Najděte střední hodnotu $\langle\hat{X}\rangle$ ve stavu $|n\rangle$.
4. Najděte varianci ΔX ve stavu $|n\rangle$.

Nápověda: použijte algebraických vlastností kreačních a anihilačních operátorů.

Úloha 2: Hermitovy polynomy

Hermitovy polynomy lze určit pomocí vytvářejícího funkcionálu $S(s,x) = \exp(-s^2 + 2sx)$ pomocí formule

$$S(s,x) = \sum_n \frac{H_n(x)}{n!} s^n.$$

1. Najděte tímto způsobem první tři Hermitovy polynomy.
2. Porovnejte nalezený výsledek s rerkurentní relací $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$, $H_{-1} = 0$, $H_0 = 1$.
3. Ověřte pomocí vytvářejícího funkcionálu relaci $\int e^{-x^2} H_n(x)H_m(x) = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}$.
4. Najděte explicitně vlnové funkce prvních pár stavů: $\langle x|0\rangle$, $\langle x|1\rangle$, $\langle x|2\rangle$.

Nápověda: Pro nalezení integrálu ve třetím bodě vyšetřujte $I(s,t) = \int \exp(-x^2)S(s,x)S(t,x)dx$.

Úloha 3: p-reprezentace

Jak vypadají vlnové funkce stacionárních stavů LHO $\langle p|n\rangle$ v p-reprezentaci? Oscilátor je připraven ve stavu $|\psi\rangle = |0\rangle + i|1\rangle$. Jaká je pravděpodobnost najít kladnou hybnost?

Úloha 4: Operátor posunutí

1. Ověřte, že operátor $\hat{U}(\alpha)$ $\exp(-\alpha(\hat{a} - \hat{a}^\dagger))$ je unitární.
2. Najděte transformaci $\hat{U}\hat{a}\hat{U}^\dagger$ anihilačního operátoru.
3. Najděte transformaci operátoru $\hat{H} = \hbar\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a} + \lambda(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)]$, kde λ je reálná konstanta.
4. Jaké je spektrum $\hat{H}$?

pozn: zopakovat: $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ $\quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$[a, a^+] = 1 \quad N = a^+a \quad N|n\rangle = n|n\rangle$

$[a, (a^+)^n] = n(a^+)^{n-1}$

$[a^n, a^+] = n a^{n-1}$

pozn: $\langle n|\underbrace{\ldots a \ldots a^+ \ldots}_{\text{libovol. pořadí, ale } a \text{ k-krát}, \ a^+ \text{ l-krát}}|n\rangle \neq$ jen pro $k = l$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^+) \qquad p = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\qquad)$

čas. závislost: $|E_n\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|E_n(t=0)\rangle$

vzorové řešení:

$\boxed{1.1}$ $\langle x\rangle = |\alpha|^2 \underbrace{\langle 0|x|0\rangle}_{0} + |\beta|^2 \underbrace{\langle 1|x|1\rangle}_{0} + \alpha\beta^* \underbrace{\langle 1|x|0\rangle}_{x_0/\sqrt{2}} + \alpha^*\beta \underbrace{\langle 0|x|1\rangle}_{x_0/\sqrt{2}} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\alpha^*\beta+\alpha\beta^*)$ $\quad = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$

búno $\alpha>0$ neboť $|\alpha|^2+|\beta|^2=1 \Rightarrow \alpha=\cos\phi;\ \beta=\sin\phi\, e^{i\delta};\ \phi\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle;\ \delta\in\langle 0,2\pi)$

max. výrazu $\alpha^*\beta+\beta^*\alpha = 2\cos\phi\sin\phi\,(e^{i\delta}+e^{-i\delta})/2 = \sin 2\phi\cdot\cos\delta$ pro $2\phi=\frac{\pi}{2}$ $\delta=0$ $\rightarrow$ $\boxed{\alpha=\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}}$

tj. $|\psi\rangle = (|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2}$

$\boxed{1.2}$ $\langle x(t)\rangle$ ... $|\psi\rangle =$ fáze $(|0\rangle + e^{-i\omega t}|1\rangle)/\sqrt{2}$ ... $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}$ ve vzorci ↑

tj. $\langle x(t)\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}) = \boxed{\frac{x_0}{\sqrt{2}}\cos\omega t}$

$\boxed{1.3}$ $\langle n|x|n\rangle = \langle n|\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}|n\rangle x_0 = \boxed{0}$

$\boxed{1.4}$ $(\Delta x)^2 = \langle n|x^2|n\rangle = \frac{x_0^2}{2}\langle n|(a+a^+)^2|n\rangle = \frac{x_0^2}{2}\langle n|aa^+ + a^+a|n\rangle = \frac{x_0^2}{2}(2n+1) = x_0^2(n+\frac{1}{2})$

$aa^+ \hookrightarrow a^+a+[a,a^+] = \hat{N}+1$

tj. $\boxed{\Delta x = x_0\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$

$\boxed{2.1}$ $e^{2xt-t^2} = 1 + 2xt - t^2 + \frac{1}{2}\underbrace{(2xt-t^2)^2}_{4x^2t^2-4xt^3+t^4} + \frac{1}{6}\underbrace{(2xt-t^2)^3}_{8x^3t^3-12x^2t^4+6xt^5-t^6} = 1+(2x)t+(2x^2-1)t^2+(\frac{8}{6}x^3-2x)t^3+\dots$

↖ + vytknout $\frac{1}{n!}$

$\Rightarrow$ $\boxed{H_0=1}$; $\boxed{H_1=2x}$; $\boxed{H_2=4x^2-2}$ $\boxed{H_3=8x^3-12x}$

$\boxed{2.2}$

-0 $\quad 2x$ $\qquad -4$ $\quad 2x$

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{4x^2-2}$ $\boxed{8x^3-12x}$ $\boxed{16x^4-48x^2+12}$

-2 $\quad 2x$ $\qquad -6$ $\quad 2x$

$\boxed{2.3}$

$I(t,u) \equiv \int S(t,x)S(u,x)e^{-x^2}dx = \sum_n\sum_m \frac{t^n}{n!}\frac{u^m}{m!}\int H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx =$

$= \int e^{-t^2+2tx}e^{-u^2-2ux}e^{-x^2}dx = e^{-t^2-u^2}e^{(t+u)^2}\underbrace{\int e^{\{-x^2+2x(t+u)-(t+u)^2\}}dx}_{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}e^{2tu} =$

$= \sqrt{\pi}\sum_\ell \frac{2^\ell}{\ell!}(tu)^\ell$ ← srovn: $\forall$ moc. $t^n u^m$: $\frac{1}{n!}\frac{1}{m!}\int H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\frac{2^n}{n!}\delta_{nm}$ $\Rightarrow$ cbd

$\boxed{2.4}$ $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0 2^n n!\sqrt{\pi}}} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right\}$ $\rightarrow$ $\boxed{\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2}}$ $\boxed{\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{x_0\sqrt{\pi}}}\frac{x}{x_0}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2}}$

$\boxed{\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0 2\sqrt{\pi}}}\left[2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2-1\right]e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2}}$ $\boxed{\psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0 3\sqrt{\pi}}}\left[2\left(\frac{x}{x_0}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2}}$

$\boxed{3.1}$ $\psi_0(p) = \int\frac{dx}{x_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}x_0 p\frac{x}{x_0}}\frac{x_0}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2} = \frac{1}{\sqrt{p_0\sqrt{\pi}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dq\,\exp\{\underbrace{-\tfrac{1}{2}q^2-ipq}_{-\frac{1}{2}(q^2+2qip-p^2)-\frac{1}{2}p^2}\}$

q $\quad 1/p_0$ $\quad \sqrt{p_0}$ $\quad \sqrt{2\pi}$

$\boxed{\psi_0(p) = \frac{1}{\sqrt{p_0\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{p}{p_0})^2}}$

mohli bychom stejně transf. $\psi_1, \psi_2, \dots$ ale lepší z

$\psi_n(p) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n\phi_0(p)$ $\qquad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} - i\hat{p}) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{p} + i\hat{q}) = \frac{(-i)}{\sqrt{2}}\left(\hat{p} - \frac{\partial}{\partial p}\right)$

tj. $\psi_n(p) = (-i)^n\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\left(p-\frac{\partial}{\partial p}\right)^n e^{-\frac{1}{2}p^2} = (-i)^n\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(p)e^{-\frac{1}{2}p^2}$

jako x-repr, ale jiná fáze

$\boxed{3.2}$ $\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{p}{p_0})^2}\frac{1}{\sqrt{p_0\sqrt{\pi}}}\left(1+\sqrt{2}\frac{p}{p_0}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$

$|\psi|^2 = \frac{1}{2p_0\sqrt{\pi}}e^{-(\frac{p}{p_0})^2}\left[1+2\sqrt{2}\frac{p}{p_0}+2\left(\frac{p}{p_0}\right)^2\right]$

$P_+ = \int_0^\infty|\psi|^2dp = \int_0^\infty dp\,(1+2\sqrt{2}p+2p^2)e^{-p^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}[I_1+I_2+I_3]$

$I_1 = \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha p^2}dp\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha}\Big|_{\alpha=1}$ $\quad I_3 = -2\cdot\frac{dI_1}{d\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ $\quad I_2 = \int_0^\infty \underbrace{p e^{-p^2}dp}_{dy}\, 2\sqrt{2} = \int_0^\infty e^{-y}dy\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$P_+ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\sqrt{\pi}+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \simeq 0.9$