

Cvičení 8: Moment hybnosti.

Motivace: spřátelit se s kulovými funkcemi a posunovacími operátory

Úloha 1: kulové funkce jako homogenní polynomy

Provedte konstrukci sférických harmonik pomocí působení operátoru (orbitálního) momentu hybnosti v x-representaci na homogenní harmonické polynomy. Používejte zápis operátorů složek momentu hybnosti v kartézské reprezentaci.

Podrobný návod:

- Pro $l = 0$ je jediný homogenní polynom $p_0(x, y, z) = 1$. Stačí najít normalizační konstantu, aby $\int |Y_{00}|^2 d\Omega = 1$.
- Pro $l = 1$ lze obecný homogenní polynom napsat jako $p_1(x, y, z) = ax + by + cz$. Pro určení Y_{11} můžeme použít podmínku $\hat{L}_+ Y_{11} = 0$, která opět určí koeficienty a, b, c až na normalizaci.
- Y_{10} a Y_{1-1} potom dostanete působením operátoru \hat{L}_-
- Pro $l = 2$ lze obecný homogenní polynom napsat jako $p_2(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + \alpha yz + \beta xz + \gamma xy$. Zatímco polynomy p_0 a p_1 jsou automaticky harmonické (tj. $\Delta p_l = 0$), p_2 musí navíc splňovat $a + b + c = 0$. První harmoniku opět najdeme z podmínky $\hat{L}_+ Y_{22} = 0$ a normalizace. Ostatní opět posunovacím operátorem.
- Takto nalezené harmoniky ještě nemusí odpovídat standardním, které najdete v literatuře. Můžete ještě přenásobit celou sadu harmonik pro každé l fázovým faktorem. Ten se obvykle volí tak, aby harmonika Y_{l0} byla kladná na severním pólu, tj. pro $x = y = 0, z > 0$.

Dodatečný námět k přemýšlení: Místo explicitního vyjádření operátorů složek momentu hybnosti \hat{L}_α v souřadnicové reprezentaci, můžete k provedení postupu výše rovněž použít komutačních relací $[\hat{L}_\alpha, \hat{x}_\beta] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{x}_\gamma$ a faktu, že působení \hat{L}_α na funkci nezávisějící na úhlech je 0. Místo polynomu $p_l(x, y, z)$ pak můžeme vzít operátorový výraz $p_l(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ působící na funkci r^{-l} .

Pro kontrolu: Tabulka prvních několika sférických harmonik:

$$\begin{array}{rcl}
 Y_{00} & = & \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
 Y_{11} & = & -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x+iy}{r} \\
 Y_{10} & = & \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \\
 Y_{1-1} & = & \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x-iy}{r} \\
 Y_{22} & = & \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{(x+iy)^2}{r^2} \\
 Y_{21} & = & -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{z(x+iy)}{r^2} \\
 Y_{20} & = & \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2} \\
 Y_{2-1} & = & \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{z(x-iy)}{r^2} \\
 Y_{2-2} & = & \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{(x-iy)^2}{r^2} \\
 Y_{33} & = & -\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \frac{(x+iy)^3}{r^3} \\
 Y_{32} & = & \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \frac{z(x+iy)^2}{r^3} \\
 Y_{31} & = & -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \frac{(4z^2 - x^2 - y^2)(x+iy)}{r^3} \\
 Y_{30} & = & \sqrt{\frac{7}{16\pi}} \frac{z(2z^2 - 3x^2 - 3y^2)}{r^3} \\
 Y_{3-1} & = & \sqrt{\frac{21}{64\pi}} \frac{(4z^2 - x^2 - y^2)(x-iy)}{r^3} \\
 Y_{3-2} & = & \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \frac{z(x-iy)^2}{r^3} \\
 Y_{3-3} & = & \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \frac{(x-iy)^3}{r^3}
 \end{array}$$

Úloha 2: Měření L

Stav bezstrukturní částice ve 3D prostoru je dán pomocí vlnové funkce v souřadnicové reprezentaci

$$\psi(\vec{r}) = (x + y + 3z)f(r),$$

kde $f(r)$ je nějaká hladká funkce radiální souřadnice $r = |\vec{r}|$. Je to vlastní funkce operátoru L^2 ? Pokud ano jaká je hodnota l ? Jaká je pravděpodobnost nalezení různých hodnot m .

Nápověda: Použijte výsledků předchozí úlohy. Uvědomte si, že pro působení operátoru momentu hybnosti je podstatná pouze závislost na úhlech, tj. násobení libovolnou funkcí r neovlivní výsledek. Rozviňte funkci do sférických harmonik, o nichž víte že jsou vlastními funkcemi \hat{L}_z

Úloha 3: Kvadrupól v nehomogenním el. poli (DU z roku 2010)

Uvažujte systém (částici) s momentem hybnosti $l = 1$. Báze stavového prostoru tedy je dána například vlastními vektory operátoru L_z : $|1\rangle$, $|0\rangle$, $|-1\rangle$ s vlastními hodnotami \hbar , 0 , $-\hbar$. Předpokládejte, že Hamiltonián tohoto systému je

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar} (\hat{L}_u^2 - \hat{L}_v^2), \quad (1)$$

kde \hat{L}_u^2 a \hat{L}_v^2 jsou operátory projekce momentu hybnosti na osy dané vektory

$$\vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_z), \quad \vec{e}_v = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - \vec{e}_z).$$

1. Napište matici Hamiltoniánu v bázi $|1\rangle$, $|0\rangle$, $|-1\rangle$ a najděte její vlastní hodnoty E_1 , E_2 , E_3 a příslušné stacionární stavy $|E_1\rangle$, $|E_2\rangle$, $|E_3\rangle$.
2. Jaký je časový vývoj stavu připraveného v čase $t = 0$:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |-1\rangle)?$$

3. Jaká by byla pravděpodobnost naměření různých hodnot L_z v tomto stavu v čase t ?
4. V čase t provedeme měření L_z^2 a naměříme hodnotu \hbar^2 . Jak bude vypadat stav po měření a jaký bude jeho další časový vývoj?

Nápověda: K sestavení matice Hamiltoniánu použijte relace

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= \frac{1}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-), \\ \hat{L}_y &= \frac{1}{2i}(\hat{L}_+ - \hat{L}_-), \\ \hat{L}_\pm |lm\rangle &= \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} |l, m \pm 1\rangle \end{aligned}$$