$\boxed{\text{QMT}-8}$ Částice v elmg poli

OPAKOVÁNÍ: $$\hat{H} = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\hat{\phi}$$

- operátor hybnosti (kanonické) $\vec{p} = -i\hbar\nabla$
- operátor rychlosti: $\vec{v} = (\vec{p} - q\vec{A})/m$

kalibrační transformace … $\chi(\vec{r})$ … libovol. skalár. pole:

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \qquad \phi \to \phi' = \phi - \partial_t \chi \qquad \psi \to \psi' = \psi e^{\frac{i}{\hbar}q\chi}$$

invariantní: – Schrödingerova rovnice
– pozorovatelné veličiny
– tok hustoty pravděpodobnosti

Aharonov – Bohm effect

… částice pohybující se po dvou trajektoriích, kde je nulové MG pole, ale mezi nimi je oblast Ω jíž protéká mg. tok ϕ → mezi trajektoriemi je vlivem mg. pole dodatečný fázový rozdíl $\frac{q\Phi}{\hbar} = \frac{qSB}{\hbar}$

⑥ částice se spinem v MG poli … Pauliho rovnice

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_s = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$$

$\pm\frac{\hbar}{2}$ $|+\rangle, |-\rangle$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}\psi_+(\vec{r})\\ \psi_-(\vec{r})\end{pmatrix}$

$\|\psi\|^2 = \int \left(|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2\right) d^3\vec{r}$

- pozorovatelné: $\hat{x}_i = \hat{x}_i \otimes \hat{I}$ $\qquad \hat{p}_i = -i\hbar\,\partial_{x_i} \otimes \hat{I}$

$\vec{S} = \hat{I} \otimes \frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\sigma}}$ $\qquad \hat{H} \otimes \hat{I} + \text{spin}$

$-\vec{\mu}\vec{B}$ ⟶ $\vec{\mu} = g\mu\frac{\vec{S}}{\hbar}$ $\quad \frac{e\hbar}{M}$

magnetický moment.

g — 2 elektron, 5.6 proton, −3.82 neutron

e^- Bohr magneton $\quad \mu = \frac{e\hbar}{2M}$

p, n nuclear magneton

$$\boxed{\hat{H} = \frac{[\hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{x}})]^2}{2M} + q\phi(\hat{\vec{x}}) - \hat{\vec{\mu}}\cdot\vec{B}}$$

pro část se spin 1/2

$\hat{H}|\psi\rangle = i\hbar\partial_t|\psi\rangle$ — Pauliho rovnice

$\Updownarrow$

$$\boxed{\left\{\frac{1}{2M}[\vec{\sigma}\cdot(\hat{\vec{p}} - q\hat{\vec{A}})]^2 + q\phi\right\}|\psi\rangle = i\hbar\partial_t|\psi\rangle}$$

nerelat. limita Diracovy rovnice

$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}I + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

$\Rightarrow \quad (\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

$[\vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - q\vec{A})]^2 = (\vec{p} - q\vec{A})^2 + i\vec{\sigma}\cdot(p-qA)\times(p-qA)$

$\underset{= 0}{p\times p} + q^2 \underset{= 0}{A\times A}$

$= (p-qA)^2 - qi\vec{\sigma}\cdot(\hat{\vec{p}}\times\hat{\vec{A}} + \hat{\vec{A}}\times\hat{\vec{p}})$

$[p, A] \sim -i\hbar(\nabla\times\vec{A})$ — $\vec{B}$

$= (\vec{p} - q\vec{A})^2 - q\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$

částice se spinem $s > \frac{1}{2}$ ... $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}^{2s+1}$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_s(\vec{r}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_{-s}(\vec{r}) \end{pmatrix} \Bigg\} \begin{array}{l} 2s+1 \\ \text{komponent} \end{array}$$

$S_z = \hbar(-s), \hbar(-s+1) \dots \hbar s$

$|+\rangle \quad |-\rangle$

$|s\rangle \quad |s-1\rangle \dots |-s\rangle$

$$\vec{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) \qquad \hat{J}_\pm \qquad \vec{\mu} = g\mu \frac{\hat{\vec{S}}}{\hbar}$$

Aplikace na atom v mg poli – Zeemanův jev

$$\hat{H} = \frac{(\vec{p} + e_0\vec{A})^2}{2M} + V(\vec{r}) \qquad \boxed{V = -\frac{\alpha}{r}} \qquad \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$q = -e_0$

konst. mg pole $\vec{B} = B\vec{e}_z = \operatorname{rot} \vec{A}$

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} = \frac{B}{2}(-y, x, 0) \ \dots \ \boxed{\operatorname{div} \vec{A} = 0}$$

$$H\psi = \frac{\hat{p}^2}{2M}\psi + \frac{e}{2M}(\underbrace{\hat{p}\cdot\hat{A} + \hat{A}\cdot p}_{-i\hbar\, 2\vec{A}\cdot\nabla}) + \cancel{\frac{e^2A^2}{2M}} + V(\vec{r})$$

$\cancel{[p, A] \sim \operatorname{div} A = 0}$

$\hookrightarrow \sim B^2 \simeq 0$ slabé pole

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2M} + \frac{e}{M}\vec{A}\cdot\vec{p} + V(\vec{r}) = H_{atom} + \underbrace{\frac{e}{2M}\vec{B}\cdot\vec{L}}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{\mu})\cdot\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\underbrace{(\vec{\mu}\times\vec{p})}_{L} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{L}$$

$\cdot(\ \times\ )$

zatím bez spin. členu $\ldots -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = 2\cdot\frac{e\hbar}{2M}\frac{1}{2}\vec{S}\cdot\vec{B}$

Hamiltonián včetně spinu

$$\boxed{H = H_{atom} + \frac{e}{2M}\vec{B}\cdot(\vec{L}+g\vec{S})}$$

atom v mg poli v přibl. slabého pole

(nerelativistický)

$|nlm\rangle \ldots H_{atom}, L^2, L_z \ldots S_z$

$\hbar m$

$|nlm\rangle \otimes |S_z\rangle$

$\frac{e}{2m}B\cdot(L_z + g\,S_z)$

± 1

$\frac{\hbar}{2}S_z$

Zeemanův posuv $\Delta E = \frac{e}{2m}B\,(m + S_z)\hbar$

KONEC 2.5.