$\boxed{\text{QM-I-2}}$ Formalismus QM – část 1.. diskrét. syst.

OPAKOVÁNÍ: • lin. vektor. prostor V … stavy $|\psi\rangle \in V$

• skalární součin .. amplituda $\langle\phi|\psi\rangle$

• lin. funcionály .. bra-vektor $\langle\phi|$.

• reprezentace v bázi $\{\phi_i\}_{i=1}^{d}$: $|\uparrow\rangle$ $|\downarrow\rangle$

$$|\phi\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \quad \dots \quad \langle\phi| \equiv |\phi\rangle^{+} = \left(f_1^{*}, \dots, f_d^{*}\right)$$

• vnější součin: $|\phi\rangle\langle\psi|$ … $=$

• lineární operátor .. $\hat{A}$ … reprez.. $\rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}$

$$a_{ij} = \langle\phi_i|\hat{A}|\phi_j\rangle$$

• projektor … $\hat{P}$ … $\hat{P}^2 = \hat{P}$; $\hat{P}^{+} = \hat{P}$

- Vlastní čísla a vektor – spektrální rozkl.

$\hat{A}|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle$ pravý vl.v. (λ … vl.č.)

$A^+ = A^{*T} = A$ hermite

$\langle\phi|\hat{A} = \lambda\langle\phi|$

$\lambda \in \mathbb{R}$
levé a pravé vl. v. totožné

prakticky: $\det|\hat{A} - \lambda\hat{I}| = 0$

~~polyn. st. d~~

vl. v. přísl. růz vl. č. jsou ortogonální:

$\hat{A}|\phi_1\rangle = \lambda_1|\phi_1\rangle$

$\hat{A}|\phi_2\rangle = \lambda_2|\phi_2\rangle$

$\langle\phi_1|\hat{A} = \langle\phi_1|\lambda_1$

$0 = \langle\phi_1|\underbrace{\hat{A}|\phi_2\rangle}_{\lambda_2|\phi_2\rangle} - \underbrace{\langle\phi_1|\hat{A}}_{\lambda_1\langle\phi_1|}|\phi_2\rangle = \langle\phi_1|\phi_2\rangle(\lambda_2 - \lambda_1)$

$\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$

$\Rightarrow$ z vl. v. $\hat{A}^+ = \hat{A}$ lze vybrat ON bázi

potřebujem. ke značení: $\underbrace{\hat{A}}_{\text{oper.}}|a\rangle = \underbrace{a}_{\text{vl.č.}}|a\rangle$

$|a\rangle \sim c \cdot |a\rangle$ nejednozn.

$\||a\rangle\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = 1$

soubor $\forall$ vl.č. $\hat{A}$ … $\sigma_A \equiv \{\lambda_i\}$ $a \in \sigma_A$ spektrum

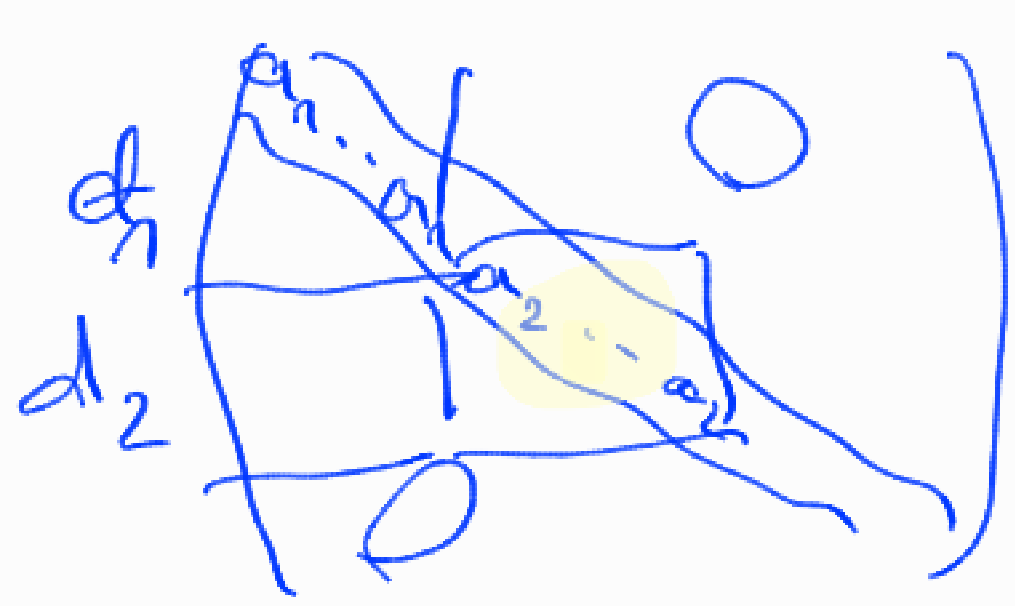
případ násob. vl.č. … $a \in \sigma_A$ $\exists$ více lnz $|a,k\rangle$

lze volit ON $\boxed{k = 1, \dots, d_a}$ násobnost vl.č. a

Lze vybrat bázi ve V z vl. v. $\hat{A} = \hat{A}^+$: $|a,k\rangle$, $a \in \sigma_A$

- $\hat{A}|a,k\rangle = a|a,k\rangle$
- $\langle a,k|a',k'\rangle = \delta_{aa'}\delta_{kk'}$
- $\langle a,k|\hat{A}|a',k'\rangle = a\,\delta_{aa'}\delta_{kk'}$

$\{|a,k\rangle\}$ ON báze



SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD OPERÁTORU

$$\boxed{\hat{A} = \sum_{a\in\sigma} a \underbrace{\sum_{k=1}^{d_a} |a,k\rangle\langle a,k|}_{\hat{P}_a} = \sum_{a\in\sigma_A} a\,\hat{P}_a}$$

projekční $P^2 = P = P^+$

$$\boxed{\hat{P}_a = \sum_k |a,k\rangle\langle a,k|}$$

nedegenerované spektrum $\# d_a = 1$ ... $\hat{P}_a = |a\rangle\langle a|$

---

poznámky:

- funkce operátoru: $f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ $\quad e^x$

$$f(\hat{A}) \overset{def}{\equiv} \sum_n f_n \hat{A}^n$$

spektr. rozkl. $\hat{A} = \sum_a a \hat{P}_a$

$$= \sum_n f_n \left(\sum_a a \hat{P}_a\right)^n$$

$$= \sum_n f_n \sum_a a^n \hat{P}_a$$

$$\hat{A}^2 = \sum_a a P_a \sum_{a'} a' P_{a'}$$

$$= \sum_{a\,a'} a a' P_a P_{a'} = \sum_a a^2 P_a$$

$\delta_{aa'} P_a$

$$\hat{P}_a \hat{P}_{a'} = \delta_{aa'} \hat{P}_a$$

$a \neq a'$ $\quad \langle a k | a' k \rangle = 0$

$a = a'$ $\quad \hat{P}_a \hat{P}_a = \hat{P}_a^2 = \hat{P}_a$

$$\hat{A}^n = \sum_a a^n \hat{P}_a$$

$$= \sum_a \underbrace{\left(\sum_n f_n a^n\right)}_{f(a)} \hat{P}_a$$

$$\boxed{f(\hat{A}) = \sum_a f(a) \hat{P}_a}$$

... alternativní def $f(\hat{A})$

... $\sqrt{A}$ ... $|A|$

pozn ~ Projektor jak samosdruž. operátor $\hat{P} = \hat{P}^+$, $\hat{P} = \hat{P}^2$

Spektr. rozkl.

$\hat{P}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ $\quad \lambda \in R$

$\hat{P}|\psi\rangle = \hat{P}^2|\psi\rangle = \hat{P}(\hat{P}|\psi\rangle) = \hat{P}\lambda|\psi\rangle = \lambda \hat{P}|\psi\rangle$

$\hat{P}|\psi\rangle = \lambda^2|\psi\rangle$ $\quad . \quad \boxed{\lambda^2 = \lambda}$ $\quad \lambda = 0$, $\lambda = 1$

$\hat P = \sum_{\lambda \in \sigma_P} \lambda P_\lambda = \hat P_1$ $\qquad \hat P_0 = \hat I - P_1$ $\qquad \hat P = \hat P$

$\hat I = \hat P_0 + \hat P_1$

RELACE ÚPLNOSTI: $\hat I = \sum |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$

$$\hat I = \sum_{a \in \sigma} \underbrace{\sum_{k=1}^{d_a} |a,k\rangle\langle a,k|}_{\hat P_a} = \sum_a \hat P_a$$

pozn.: $\hat A = \sum_{a,k} |ak\rangle\, a \,\langle ak| =$

$$\hat A = \underbrace{\hat U \hat \Lambda}\, \hat U^+$$

Základní principy kvantové teorie (POSTULÁTY)

1) Stav systému je popsán vektorem v komplexním LVP (stavový prostor) $\equiv \mathcal{H}$, přesněji paprskem $\lambda|\psi\rangle$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

2) Pozorovatelným veličinám odpovídají Hermitovské lineární operátory. Přípustné hodnoty veličiny jsou dány vl. č. $\hat A$ ... $\hat A|a\rangle = a|a\rangle$ -- σ_a

$\longrightarrow \hat A = \sum_a a \hat P_a$

3) Skalární součin na stavovém prostoru def. tzv. amplitudu pravděpodobnosti. Podmíněná pravděpodobnost pro naměření hodnoty a pozorovatelné $\hat A$ systému připraveného ve stavu $|\psi\rangle$ je $\qquad a \in \sigma_{\hat A}$

$$p(a|\psi) \equiv |\langle a|\psi\rangle|^2 \quad \text{(nedegen. } a\text{)} \quad \text{obecně} \equiv \langle\psi|\hat P_a|\psi\rangle$$

$\langle\psi|a\rangle\langle a|\psi\rangle$

Po naměření této hodnoty systém přejde do stavu

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\hat{A}} |\bar{\psi}\rangle = |a\rangle \text{ (nedeg. } a) \qquad \text{obecně } |\bar{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{P}_a |\psi\rangle$$

$$\langle\psi|a\rangle = \langle a|\psi\rangle^*$$

za předp. $\|\psi\| = 1$ neboli $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

OBECNĚ

$$p(a,\psi) = \frac{|\langle a|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

... normování

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{|\psi\rangle}{\|\psi\|} = \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}}$$