$\boxed{\text{QM I - 2020}}$ Formalismus QM 1.

OPAKOVÁNÍ: ... fyz. veličiny .. pozorovatelné $\hat{A} = \hat{A}^+$

$[\hat{A},\hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ / $\neq 0$ .. Nekompatibilní $i\hat{C} = [\hat{A},\hat{B}]$

→ relace neurčitosti $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}\langle C \rangle$

$= 0$ .. kompatibilní:

- L1 .. invariance vl. podprostorů .. $|\psi\rangle$ vl. v. A $\Rightarrow$ $B|\psi\rangle$ vl. v.
- L2 ... maticové elementy: $\langle a_1 k_1 | \hat{B} | a_2 k_2 \rangle = 0$ pro $a_1 \neq a_2$
- L3 ... $0 = [A,B] \Rightarrow [A, P_b] = [B, P_a] = [P_a, P_b] = 0$

dokonce $[A,B] = 0 \Leftrightarrow [P_a, P_b] = 0 \;\; \forall a, b$

$\boxed{[A,B]=0}$ $\Rightarrow$ ∃ spol. báze vl. v. .. $|a, b, k\rangle$ ... $P_{ab} = P_a P_b$

k:

zobecnění .. množina komutujících operátorů

$\{\hat{A}^{(1)}, \hat{A}^{(2)}, \dots, \hat{A}^{(N)}\}$ ... $[\hat{A}^{(i)}, \hat{A}^{(j)}] = 0 \;\; \forall i j$

... ∃ společná báze z vl. v. $\hat{A}^{(i)} \;\forall i$ $|a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(N)}, k\rangle$

$$\hat{A}^{(i)} |a^{(1)} \dots a^{(N)}, k\rangle = a^{(i)} |a^{(1)}, \dots, a^{(N)}, k\rangle \quad .. \sum_k .. P_{a^{(1)} \dots a^{(N)}}$$

$$\hat{I} = \sum_{a^{(1)}} \sum_{a^{(2)}} \dots \sum_{a^{(N)}} \sum_k |a^{(1)} \dots a^{(N)}, k\rangle\langle a^{(1)} \dots a^{(N)}, k|$$

Úplný systém komutujících operátorů (ÚSKO)

<u>Def:</u> Řekneme, že $A^{(1)} \dots A^{(N)}$ tvoří ÚSKO pokud každá přípustná N-tice vl. č. $\{a^{(1)}, \dots, a^{(N)}\}$ jednozn. určuje společný vl. v. (až na normalizaci a fázi). $e^{i\varphi}$

<u>pozn.:</u> tj. spol. projektor $\hat{P}_{a^{(1)} \dots a^{(N)}} = \hat{P}_{a^{(1)}} \hat{P}_{a^{(2)}} \dots \hat{P}_{a^{(N)}}$ $d = 1$, 0

je buď 1-dimenzionální a nebo $\hat{P}_{a \dots a^{(N)}} = \hat{0}$ $|+\rangle$ $|-\rangle$ $\frac{\hbar}{2}$

$|a^{(1)} \dots a^{(N)}\rangle$ $|\psi\rangle$ $|\phi\rangle$ $\hat{S}_z$ $-\frac{\hbar}{2}$

pozn: • $\{\hat{A}^{(1)}, \dots, \hat{A}^{(N)}\}$ jediná veličina jejíž hodnoty jsou N-tice $(a^{(1)}, \dots, a^{(N)})$

• něřené $A^{(i)}$ $A^{(j)}$ jsou nezávislé $\qquad P_{a^{(i)}}^2 = P_{a^{(i)}}$

$A^{(i)}$

$|\psi\rangle \qquad |a^{(i)}\rangle \qquad |a^{(j)}\rangle$

$P_{a^{(i)}}|\psi\rangle \qquad P_{a^{(j)}}(P_{a^{(i)}}|\psi\rangle) \qquad P_{a^{(i)}} P_{a^{(j)}} P_{a^{(i)}} |\psi\rangle$

• funkce operátorů $f(\hat{A}^{(1)} \dots A^{(N)}) = \sum_{a^{(1)} \dots a^{(N)}} f(a^{(1)} \dots a^{(N)}) P_{a^{(1)} \dots a^{(N)}}$

VĚTA:

pokud operátor $\hat{F}$ komutuje se $\forall [A^{(i)}, F] = 0$ z ÚSKO pak lze napsat $\hat{F} = f(A^{(1)}, \dots, A^{(N)})$

DK: $\hat{F}, \hat{A}^{(1)} \dots \hat{A}^{(N)} \dots \; \exists$ spol báze vl. v.

$|a^{(1)}, \dots, a^{(N)}, f\rangle$ ale $a^{(1)} \dots a^{(N)}$ určují ten vektor jednoznačně

tj. $\exists$ jednozn. zobr. $a^{(1)} \dots a^{(N)} \longrightarrow f$

$\Leftarrow \; \exists \; f = f(a^{(1)}, \dots, a^{(N)})$

$\boxed{\text{ÚSKO}}$ ... $\hat{H}$ ... ④ $i\hbar \partial_t |\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$\rightsquigarrow \hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \qquad |\psi\rangle = |\psi(0)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

$\Delta E = 0$

Direktní součet prostorů

$\mathcal{H}^{(1)}_{d^{(1)}}$; $\mathcal{H}^{(2)}_{d^{(2)}}$

def $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)}$ $\boxed{d = d^{(1)} + d^{(2)}}$ $|\psi^{(i)}\rangle \in \mathcal{H}^{(i)}$

$(|\psi^{(1)}\rangle, |\psi^{(2)}\rangle)$ $\qquad + \quad \alpha \cdot$

$\alpha|\phi\rangle + |\psi\rangle = (\alpha|\phi^{(1)}\rangle + |\psi^{(1)}\rangle, \alpha|\phi^{(2)}\rangle + |\psi^{(2)}\rangle)$

$\langle\phi|\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\phi^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle_{\mathcal{H}^{(1)}} + \langle\phi^{(2)}|\psi^{(2)}\rangle_{\mathcal{H}^{(2)}}$

$$|\psi\rangle \ldots \begin{pmatrix} \psi_1^{(1)} \\ \vdots \\ \psi_{d^{(1)}}^{(1)} \\ \hline \psi_1^{(2)} \\ \vdots \\ \psi_{d^{(2)}}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, d^{(1)} \\ \\ \}\, d^{(2)} \end{matrix}$$

$$A^{(1)} \ldots \mathcal{H}^{(1)} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

PR: $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$ $\qquad \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}$

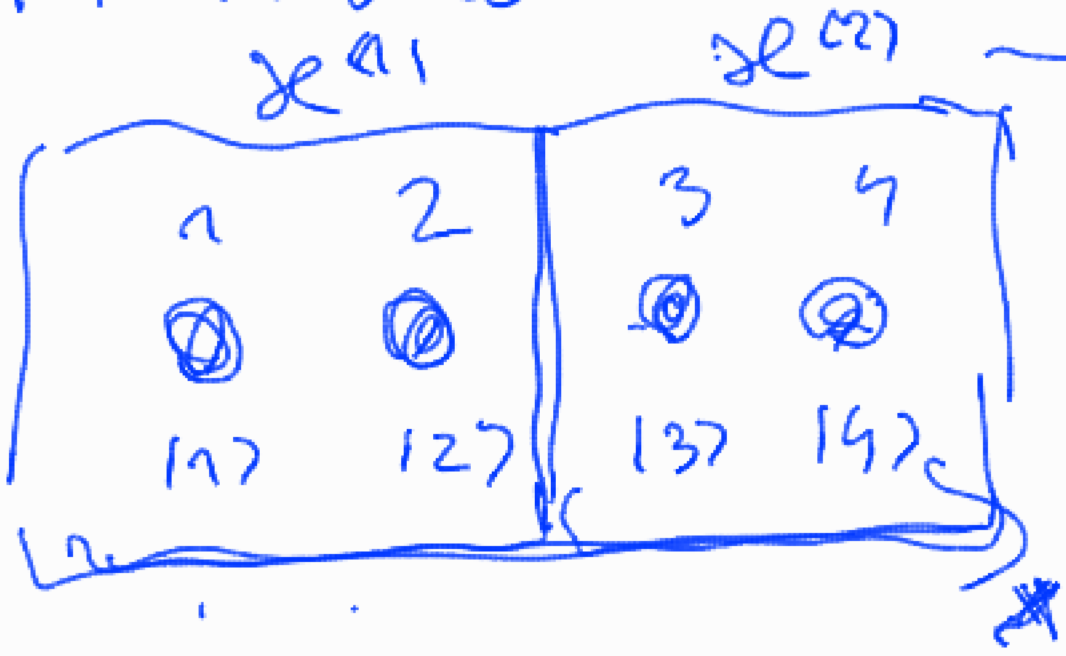
$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)}$ ... rozklad

$\hat{A} \ldots \{a\} = \sigma_A \ \ldots \hat{P}_a \ldots \mathcal{L}\{|a,k\rangle\} = \mathcal{H}^{(a)}$

$\hat{I} = \sum \hat{P}_a \ \ldots \ \mathcal{H} = \bigoplus_{a \in \sigma} \mathcal{H}^{(a)}$

---

fyzikálně ... $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)}$ ... další možné nadrob nějaké pozorov.



DIRIKEKTNÍ SOUČIN PROSTORŮ

Def: $\mathcal{H}^{(1)}$ ... báze $\{|\phi_i^{(1)}\rangle\}_{i=1}^{d_1}$ podob. $\mathcal{H}^{(2)}$

def $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ ... prostor s bazí $\{|\phi_i^{(1)}\rangle|\phi_j^{(2)}\rangle\}_{i=1\ j=1}^{d_1\ d_2}$

... dimenze $d = d_1 d_2$

... obecný vektor $|\psi\rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} \psi_{ij} |\phi_i^{(1)}\rangle |\phi_j^{(2)}\rangle}$ $\quad \oplus \ d.$

$i=1$ $\begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \vdots \\ \psi_{1d_2} \\ \hline \psi_{21} \\ \vdots \\ \psi_{2d_2} \\ \hline \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, d_2 \\ \\ \}\, d_2 \end{matrix} \Bigg\}\, d_1$

značí: $\left\{ |\phi_i^{(1)}\rangle_{\mathcal{H}^{(1)}} |\phi_j^{(2)}\rangle_{\mathcal{H}^{(2)}} = |\phi_i^{(1)}\rangle_{\mathcal{H}^{(1)}} \otimes |\phi_j^{(2)}\rangle_{\mathcal{H}^{(2)}} = |\phi_i^{(1)}\phi_j^{(2)}\rangle_{\mathcal{H}} \right\}$

$|\psi^{(1)}\rangle = \sum_i \psi_i^{(1)} |\phi_i^{(1)}\rangle \qquad |\psi^{(2)}\rangle = \sum_j \psi_j^{(2)} |\phi_j^{(2)}\rangle$

a direkt součin $\quad |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\psi^{(2)}\rangle = \sum_{ij} \psi_i^{(1)} \psi_j^{(2)} |\phi_i^{(1)} \phi_j^{(2)}\rangle.$

a skalární souč. (na $\mathcal{H}$) $\quad |\Phi\rangle = |\phi^{(1)}\phi^{(2)}\rangle \equiv |\phi^{(1)}\rangle \otimes |\phi^{(2)}\rangle$

$|\Psi\rangle = |\psi^{(1)}\psi^{(2)}\rangle \equiv |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\psi^{(2)}\rangle$

$$\langle \Phi | \Psi \rangle_{\mathcal{H}} \equiv \langle \phi^{(1)} | \psi^{(1)} \rangle_{\mathcal{H}^{(1)}} \cdot \langle \phi^{(2)} | \psi^{(2)} \rangle_{\mathcal{H}^{(2)}}$$

L + linearita $\langle\,\rangle$ ... ostatní $\quad |\phi\rangle = \sum \phi_{ij} |\phi_i \phi_j\rangle$

$|\psi\rangle = \sum \psi_{ij} |\phi_i \phi_j\rangle$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_{ij} \phi_{ij}^* \psi_{ij}$$

pozn: faktorizované vektory $\quad |\psi\rangle_{\mathcal{H}} = |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\psi^{(2)}\rangle$

$\exists\, |\psi^{(1)}\rangle \in \mathcal{H}^{(1)}$

$|\psi^{(2)}\rangle \in \mathcal{H}^{(2)}$

entanglované stavy ... nelze faktorizovat.

OPERÁTORY NA $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$: $\quad \hat{A}$ na $\mathcal{H}^{(1)}$.

def $\hat{A} \otimes \hat{B}$ $\quad$ ... $\hat{A} \otimes \hat{B} \left(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \right)$

$\hat{A}$ oper na $\mathcal{H}^{(1)}$ a $\hat{B}$ na $\mathcal{H}^{(2)}$ $\quad$ lineární $\quad \underset{def}{\equiv} \left(\hat{A} |\phi\rangle \right)_{\mathcal{H}^{(1)}} \otimes \left(\hat{B} |\psi\rangle \right)_{\mathcal{H}^{(2)}}$

rozšíření operátoru A a $\mathcal{H}^{(1)}$ na $\mathcal{H}$ $\quad \equiv \hat{A} \otimes \hat{I}$

B a $\mathcal{H}^{(2)}$ na $\mathcal{H}$ $\quad \equiv \hat{I} \otimes \hat{B}$

pozn: • $\langle \phi_i^{(1)} \phi_j^{(2)} | \phi_{i'}^{(1)} \phi_{j'}^{(2)} \rangle = \delta_{ii'} \delta_{jj'}$

• def lze triv zobecnit na $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)} \otimes \mathcal{H}^{(3)}$

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^{N} \mathcal{H}^{(i)} \qquad \bigotimes_{i=1}^{3} \mathcal{H}^{(i)}$$

PŘÍKLADY: $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$

$\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$

$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^2$

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$

$\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^4$

$\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^4$

$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^3$

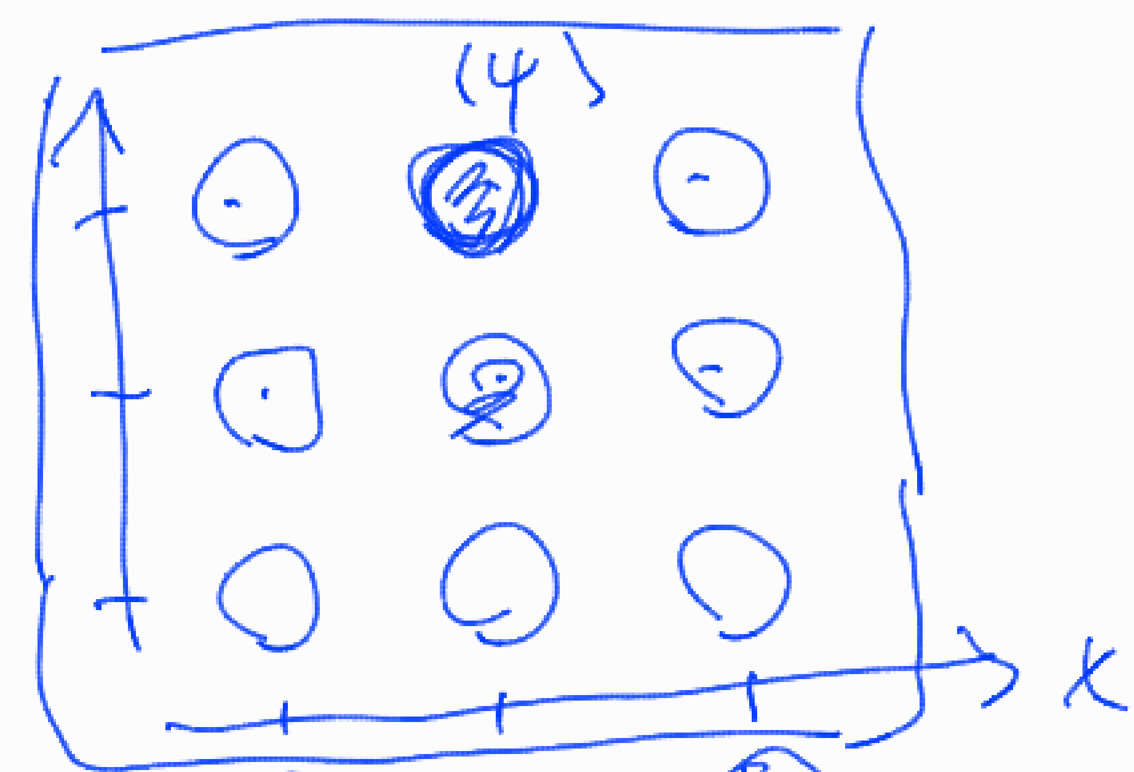
$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$

OBECNĚ $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{n+m}$

$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{n \cdot m}$

$|2\,3\rangle$

$|\psi\rangle$



y

$\mathcal{H}^{(1)}$

x

(1). (2). (3).

$|1\rangle \quad |2\rangle \quad |3\rangle \qquad |x\rangle$

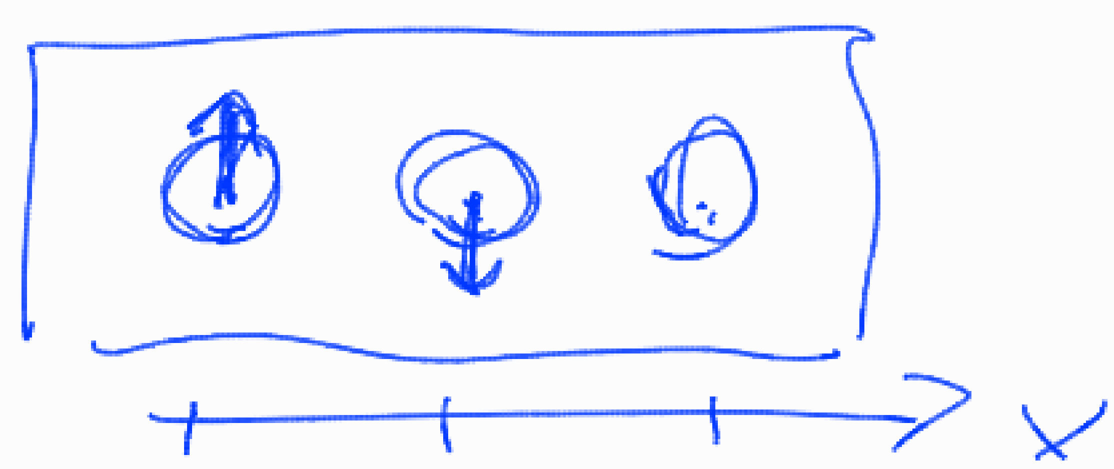
$x \in \{1,2,3\}$

$\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(1)}$

$|\psi\rangle = |2\rangle \otimes |3\rangle$

$\mathcal{L}(|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle)$

tečky $\quad \mathcal{H}^{(1)} \equiv \mathbb{C}^3$



+ spin

x

1 2 3

spin $\quad \mathcal{H}^{(2)} \equiv \mathbb{C}^2 \; \dots \; \mathcal{L}\{|+\rangle, |-\rangle\}$

částice v tečkách se spinem $\quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$

$|x\,s\rangle \equiv |x\rangle \otimes |s\rangle \qquad \pm\frac{\hbar}{2}$

$x = 1, 2, 3 \qquad s = \pm$

$$|\psi\rangle = \sum_x \sum_s \psi_{xs} |xs\rangle \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\underbrace{|1+\rangle - |2-\rangle}_{\text{entanglovaný stav}}\big) \;\dots\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

faktoriz.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\rangle + |2\rangle\big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle - |-\rangle\big) = \frac{1}{2}\big(|1+\rangle - |1-\rangle + |2+\rangle - |2-\rangle\big)$$

$|x-\rangle \dots S_x \dots -\frac{\hbar}{2} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$