QMI-2 Formalismus QM 1 - diskrétní syst.

Postuláty: (1) stavový prostor ... LVP se skal. souč.

$\rightarrow |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ... příklady spin $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$; Q-dots ... $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$

... direktní součet a součin $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$; $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

(2) pozorovatelné ... lin. operátory na $\mathcal{H}$ ... $\hat{A}^+ = \hat{A}$

$\rightarrow$ spektrum ON báze ; vl. č. reálné $\hat{A} = \sum_{a \in \sigma} a \hat{P}_a$

pozn.: obecně ↑ pro normální operátory $[\hat{N}, \hat{N}^+] = 0$

ale vl. čísla komplexní ... $\mathrm{Re}\, n =$ vl. č. $\frac{1}{2}(\hat{N} + \hat{N}^+)$

$U^+ = U^{-1}$ $\quad UU^+ = U^+U = I$ $\quad [U, U^+] = 0$ $\quad |\lambda| = 1$

$\mathrm{Im}\, n =$ vl. č. $\frac{1}{2i}(\hat{N} - N^+)$

komutující operátory

(kompatibilní veličiny) ... ÚSKO ; $\rightarrow$ báze

$\searrow$ každý další komut. je fcí $|a\rangle$

(3) postulát o měření

jen $a \in \sigma_A$ lze naměřit $p_a = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ $\quad |\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = \hat{P}_a|\psi\rangle$

(4) Postulát o časovém vývoji a jeho důsledky

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle} \quad (SR)$$

operátor Hamiltoniánu = energie

Náznak odvození (Sakurai)

$|\psi(t)\rangle \quad t \in \mathbb{R} \qquad |\psi(t + \delta t)\rangle = \hat{U}(\delta t)|\psi(t)\rangle$

$\delta t \rightarrow 0 \qquad \hat{U} = \hat{I} \qquad \hat{U}(\delta t) \approx I + \delta t\, \hat{K}$

$\|\psi\|^2 = 1 \qquad 1 = \langle\psi(t+\delta t)|\psi(t+\delta t)\rangle = \langle\psi|U^+ U|\psi\rangle$

$\forall |\psi\rangle \equiv |\psi(t)\rangle$

$1 = \langle\psi|(I + \delta t \hat{K}^+)(I + \delta t \hat{K})|\psi\rangle \qquad \forall |\psi\rangle$

$I = I + \delta t(\underbrace{\hat{K}^+ + \hat{K}}_{=0}) + O(\delta t^2) \rightarrow \hat{C} = \hat{C}^+$

$\boxed{\hat{K} = i\hat{C}}$

$\therefore C - C^+ = 0 \qquad K^+ = -i\hat{C}$

- $\hat{U}(\Delta t) = \hat{I} - \frac{i\Delta t}{\hbar}\hat{H} + O(\Delta t^2)$ $\qquad \left(-\hat{e}\right) = \frac{\hat{H}}{\hbar}$

Energie $[\hbar] = [E \cdot t]$

$\Rightarrow [\hat{H}] = [E]$

$$\frac{\partial}{\partial \Delta t} |\psi(t+\Delta t)\rangle = \hat{U}(\Delta t)|\psi(t)\rangle \Big|_{\Delta t \to 0} \Rightarrow (SR)$$

$$\boxed{(SR) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle}$$ časová Schrödingerova rovnice

formální řešení ... $\hat{H}$ je konst. oper. nezáv. na t

$i\hbar\dot{\psi} = \hat{H}\psi \Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\cdot t\}|\psi(0)\rangle}$

$\langle\phi|A|\psi\rangle = \langle\phi|\frac{d}{dt}\hat{F}(t)|\psi\rangle$

$\psi(t+\Delta t) = U(\Delta t)\psi(t)$, $t \to 0$, $\Delta t \to t$, $t \to 0$

$-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\, \underbrace{e^{\cdots}|\psi(0)\rangle}_{|\psi\rangle}$

$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\underline{|\psi(0)\rangle}$

EVOLUČNÍ OPERÁTOR

tj. $\boxed{\hat{U}(t) = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\}}$ $\qquad \left(\equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)^n\right)$

výpočet: najít spektr. rozklad $\hat{H} = \sum_n E_n P_n$

- $\boxed{\hat{H}|\psi_{n,k}\rangle = E_n|\psi_{n,k}\rangle}$ stacionární (SR)

$P_n \equiv \sum_k |\psi_{n,k}\rangle\langle\psi_{n,k}|$

$\hat{U}(t) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\hat{P}_n$

vl. stav $\hat{H}$

$|\psi_n\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\psi_n(0)\rangle$

- čas. vývoj obecného stavu

$|\psi\rangle = \hat{I}|\psi\rangle = \sum_{nk}\langle\psi_{nk}|\psi\rangle\cdot|\psi_{nk}\rangle = \sum_{nk} c_{nk}|\psi_{nk}\rangle$ $\quad t=0$

$\sum_n\sum_k |\psi_{nk}\rangle\langle\psi_{nk}|$

$\hat{U}(t)$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{nk} c_{nk}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\psi_{nk}\rangle$$

• stacionární stavy ~~a integrály pohybu~~ $e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}$

stac. stavy ... $\hat{H}|\varphi_{nk}\rangle = E_n|\varphi_{nk}\rangle$

≡ vl. v. $\hat{H}$ – čas. vývoj $|\varphi_{nk}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\varphi_{nk}\rangle$

měření: $\hat{A}$ $\quad p_a = \langle\varphi_{nk}(t)|\hat{P}_a|\varphi_{nk}(t)\rangle = \langle\varphi_{nk}|\hat{P}_n|\varphi_{nk}\rangle$

$$\langle\varphi_{nk}|e^{+\frac{i}{\hbar}E t}\hat{P}_a e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\varphi_{nk}\rangle$$

tj. p_a nezávisí na čase

podob. $\langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle = \langle A\rangle$

– V pozorování (měření) nezávisí na čase

◎ integrály pohybu – měřitelná veličina jejíž pozorování nezávisí na čase

měř. .. hodnoty nezáv. na čase

def $\boxed{[\hat{H},\hat{A}]=0}$ $\quad \langle A\rangle = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$

$$= \langle\psi|e^{+\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi\rangle$$

⇓

$[\hat{P}_n,\hat{A}]=0$

$[\hat{A},\hat{H}]=0$ $\quad \sum c_n(\quad)^n$, $c_n = \frac{1}{n!} \in R$

$[\hat{H},\hat{P}_a]=0$ $\Rightarrow [\hat{A}, f(\hat{H})]=0$ $\quad \hat{I}$ $\quad f(A)^+ = f(A^+)$

$\sum c_n \hat{H}^n$

$$= \langle\psi|e^{+\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}|\psi\rangle$$

Pozor! obecně $e^{\hat{A}}\cdot e^{\hat{B}} \neq e^{\hat{A}+\hat{B}}$

$$\boxed{[\hat{A},\hat{B}]=0 \Rightarrow e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}}$$

$$e^{A}e^{-A} = e^{A-A}$$

závěr $\langle A\rangle = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$

nezáv. na čase

A $\quad p_a = \langle \psi(t) | \hat{P}_a | \psi(t) \rangle = \langle \psi | \hat{P}_a | \psi \rangle$ ✓

$\quad e^{+\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \qquad e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$

$\boxed{\text{QMI} - 3}$ Formalismus kvantové teorie 2

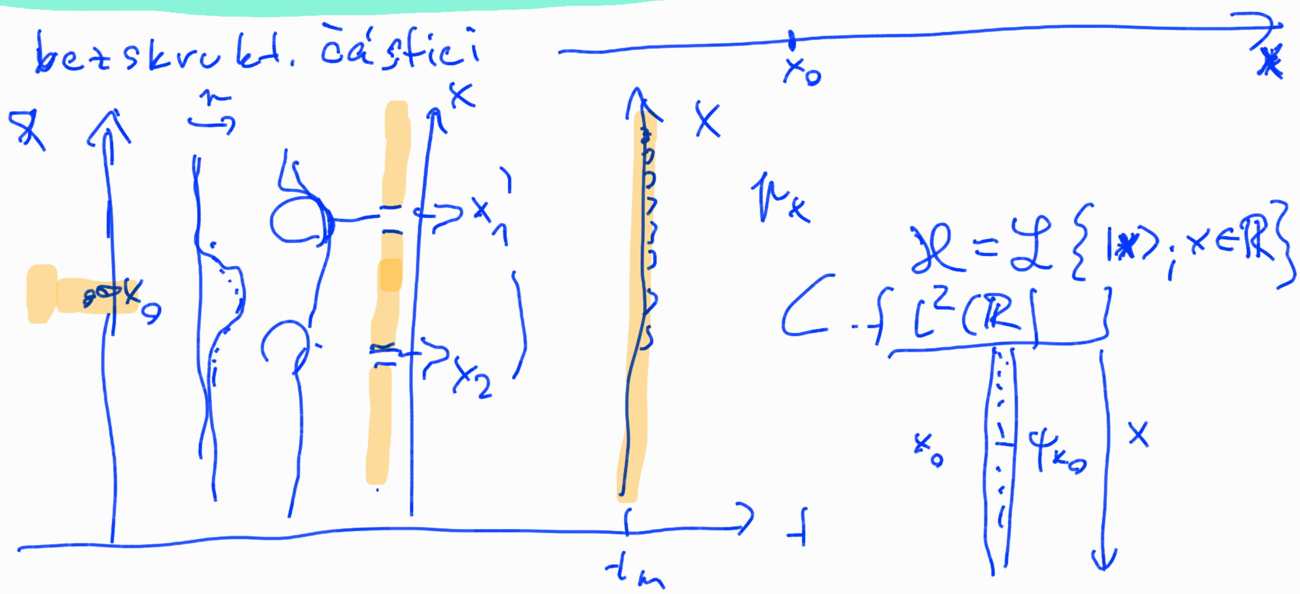
(spojité systémy) a nekonečně rozlehlé

$\underline{\mathcal{H}}$ .. $d = \infty$; $\hat{A}$ .. spojité spektrum $a \in \sigma$ $\qquad |a\, k\rangle$

$$\sum_a \to \int_a$$

$$\sum_a \to \sum_a + \int_a \qquad \sum_{a\,k} \to \int_a \sum_k \,,\; \int_a \int_k \,,\; \sum_a \int_k$$

DŘ1 $\quad$ 1D bezstrukt. částici



OBECNÝ VEKTOR $\quad |\psi\rangle = \sum_x \psi_x |x\rangle \quad \ldots \quad |\psi\rangle = \int \psi(x) |x\rangle dx$

$$\hat{I} = \sum_x |x\rangle\langle x| \qquad \ldots \qquad \hat{I} = \int_{\mathbb{R}} |x\rangle\langle x| dx$$

- skalární součin $\quad \psi_x \equiv \psi(x) = \langle x | \psi \rangle$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_x \phi_x^* \psi_x \quad \ldots \quad \langle \phi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)^* \psi(x) dx$$

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = \sum_x |\psi_x|^2 \quad \ldots \quad \|\psi\| = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx$$

PŘZ nekonečný řetízek Q-teček

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

$\dots \odot \quad \odot \quad \odot \quad \odot \quad \odot \quad \odot \dots$

$|0\rangle \quad |2\rangle$

$\longrightarrow m \quad (x) \quad m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}\{|m\rangle;\ m \in \mathbb{Z}\} \qquad |\psi\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m |m\rangle$$

$\hookrightarrow \psi(m) \quad \psi_m$

$\hookrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m^* \psi_m$$

$\uparrow \phi_m \quad \uparrow \psi_m$

$d = \infty$

$\dots \psi_{-1}, \psi_0, \psi_1, \dots$

---

zpět k PŘ1: měř. veličina -- x ~ $\hat{x}$

$\mathcal{H} = \mathcal{L}\{|x\rangle, x \in \mathbb{R}\}$ -- $\hat{x}|x_0\rangle = x_0 |x_0\rangle$

jak vypadá vektor $|x_0\rangle$ v x-reprezentaci

$$|\psi\rangle = \int dx\ \psi(x)|x\rangle \qquad |x_0\rangle \cdot -$$

$\hookrightarrow \langle x|\psi\rangle \equiv \psi(x)$ vlnová funkce

$(\dots 0, 0, 1, 0, 0 \dots) - x_0$

$$|\psi_{x_0}\rangle = \langle x|x_0\rangle \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases} \qquad \int \delta_{xx_0}\, dx = 0 \ ?$$

$$\langle x|x_0\rangle = \delta_{xx_0}$$

$$\langle x|\psi_{x_0}\rangle = \psi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$$

$$\delta_{xx_0} = \langle x_0|x_0'\rangle = \boxed{\int dx\, \delta(x - x_0)\, \delta(x - x_0')} = \delta(x_0 - x_0')$$

$x_0' \quad x_0$

$\delta(x_0' - x_0)$