QM-I-3 Formalismus QM 2 – spojité systémy

OPAKOVÁNÍ: nekonečně dimenzionální stavové prostory

Př 1 … částice v 1D

$\mathcal{H} = \text{"}\mathcal{L}\{|x\rangle;\ x \in \mathbb{R}\}\text{"}$

$|\psi\rangle \longleftrightarrow (\psi(x))$, $x \in \mathbb{R}$

$\langle\phi|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi^*(x)\psi(x)\,dx$

Př 2 … ∞ řetízek Q-teček

$\mathcal{H} = \text{"}\mathcal{L}\{|n\rangle;\ n \in \mathbb{Z}\}\text{"}$

$|\psi\rangle \longleftrightarrow (\ldots, \psi_{-1}, \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots)$

spoč. báze

$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_n \phi_n^* \psi_n$

BÁZE:

$|x_0\rangle$ … vln. fce $\langle x|x_0\rangle = \phi_{x_0}(x) = \delta(x-x_0)$

$|n_0\rangle$ … vln. fce $\phi_n^{(n_0)} = \delta_{n n_0}$

Pavel Exner Matemat. met. QT; Blank, Havlíčkem

Stavový prostor: Hilbertův prostor (separabilní)

Def LVP $\mathcal{H}$ nazveme Hilb. prostorem pokud $\forall$ Cauchyovská (se skal. souč.) – $\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ posl. vektorů z $\mathcal{H}$ má v $\mathcal{H}$ limitu (úplnost)

Pozn: Cauchy … $\{|\psi_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$: $\forall \varepsilon\ \exists K\ \forall m,n > K\ \|\psi_n - \psi_m\| < \varepsilon$

Lim: $|\psi_n\rangle \to |\psi\rangle$ … $\|\psi_n - \psi\| \to 0$

Def Separabilita $\Longleftrightarrow \exists$ spočetná hustá podmnožina
$\Longleftrightarrow \exists$ spočetná ON báze

PŘ: • prostor ℓ^2 ≡ prostor posl $|\psi\rangle = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\sum_n |\psi_n|^2 < \infty$

• prostor $L^2(a,b)$ … $(a,b) \subset \mathbb{R}$ (včetně $(a,b) = \mathbb{R}$)

≡ funkce $\psi(x): (a,b) \to \mathbb{C}$ … $\int_{(a,b)} |\psi(x)|^2\,dx < \infty$

$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{(a,b)} \phi^*(x)\, \psi(x)\, dx$

$|\phi_1\rangle = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$

Báze: • v ℓ^2 ... kanonic báze $|\phi_2\rangle = \{0, 1, 0, \dots\}$

$|\phi_{n_0}\rangle = \{\delta_{n n_0}\}_{n=1}^{\infty}$

• $L^2(0,L)$ .. Fourier. báze

$|\phi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2ik\pi x/L}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad k, -k$

$\hat{I} = \sum_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$

alternativa ..reálná báze

$|\phi_n\rangle = \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{2\pi x}{L}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\frac{2\pi x}{L}, \dots \right\}$

$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_S \\ \psi_C \\ \psi_{S2} \\ \psi_{C2} \\ \vdots \end{pmatrix}$

• $|\psi\rangle = \sum_k \psi_k |\phi_k\rangle$ $\qquad \psi_k = \langle \phi_k | \psi \rangle$

$|\psi\rangle^+$ $\quad \langle \psi|$

Duální prostor: $\mathcal{H}^*$

Lineární funkcionály (spojité) : $F: \mathcal{H} \to \mathbb{C}$
$\Leftarrow$ omezené $\qquad F(|\psi\rangle)$

Rieszova věta o reprezentaci: $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$

$\forall F$ spoj. lin. funkcionál na $\mathcal{H}$ $\quad \exists!\, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$ $\quad F(|\psi\rangle) = \langle \phi | \psi \rangle$

navíc $\quad \|F\|_{\mathcal{H}^*} = \|\phi\|_{\mathcal{H}}$ $\qquad \|F\|_{\mathcal{H}^*} = \sup_{\psi \in \mathcal{H}} \frac{|F(|\psi\rangle)|}{\|\psi\|}$

pozn. L^p $\quad (L^p)^* = L^q$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $\quad$ → Banach

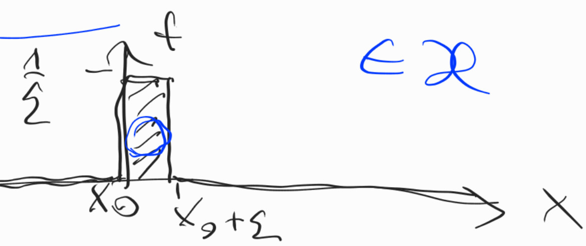
$\hat{X}\, |x_0\rangle = x_0 |x_0\rangle$

$\delta(x - x_0)$

Diracova δ-fce a distribuce

$|x_0\rangle$ $\quad \phi_\varepsilon(x) = \delta_\varepsilon(x - x_0)$ $\qquad \in \mathcal{H}$

$= \frac{1}{\varepsilon} \chi_{\langle 0,\varepsilon)}(x - x_0)$



$0 = \int \phi_\varepsilon(x)\, dx = 1$ $\qquad \varepsilon \to 0$

$\phi_0(x) = \delta(x - x_0)$ $\begin{cases} \neq 0 & x = x_0 \\ = 0 & x \neq x_0 \end{cases}$

δ funkce je spoj lin fcionál $F_\varepsilon(|\psi\rangle) = \int \delta_\varepsilon(x)\underline{\psi(x)}\,dx$

$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \psi(x_0)$

testovací fce

Gelfandův triplet: $\mathcal{H} \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}^* \in \overline{\mathcal{H}}^* = \overline{\mathcal{H}}$

Rigged Hilbert space (testovací fce) distribuce

(ON báze)

$\phi_\varepsilon(x) \xrightarrow[\mathcal{H}]{} \delta(x-x_0)$

Použití $\delta(x)$ jako "báze" v $\mathcal{H}$" $\quad |x_0\rangle = \delta(x-x_0)$

praktické poznámky

$$|\psi\rangle \overset{"}{=} \sum_x \langle x|\psi\rangle |x\rangle \longrightarrow \int \psi(x)\,\delta^*(x-x_0)\,dx = \psi(x_0)$$

$$= \int dx_0 \underbrace{\langle x_0|\psi\rangle}_{\psi(x_0)} \delta(x-x_0) = \underline{\psi(x)}$$

$$\langle x_0|x_0'\rangle = \int dx\, \delta(x-x_0)\,\delta(x-x_0') = \underline{\delta(x_0-x_0')} \quad (\delta_{x_0 x_0'})$$

$$\langle x|\hat{I}|x'\rangle = \text{"}\sum_{x_0} |x_0\rangle\langle x_0| \text{"} = \int dx_0\, \delta(x-x_0)\,\delta(x'-x_0)$$

$$\boxed{\hat{I} = \delta(x'-x)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$I(x,x') = \underline{\langle x|I|x'\rangle}$$

$$\hat{I}|\psi\rangle = \int I(x,x')\,\psi(x')\,dx' = \int \delta(x-x')\,\psi(x')\,dx'$$

$$\hat{I}|\psi\rangle = \psi(x) \equiv |\psi\rangle$$

$\hat{x}$ jako operátor v bázi $|x_0\rangle$

$$\boxed{\hat{x}|x_0\rangle = x_0|x_0\rangle}$$

$$\hat{x}|\psi\rangle = \int f(x, x')\psi(x')dx'$$
$$= \int x\delta(x-x')\psi(x')dx' = x\psi(x)$$

$$f(x', x) = \delta(x-x')x$$

$$\langle x'|\hat{x}|x\rangle = \langle x'|x|x\rangle = x\langle x'|x\rangle = x\underbrace{\delta(x-x')}_{\delta_{xx'}}$$

- **Operátory v $\mathcal{H}$**

$\hat{A} : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{R}(A)$ lineární

def. obor — domain of def.; range; $\psi \to A\psi$

$\mathcal{D}, \mathcal{R} \in \mathcal{H}$

$$\boxed{\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}}$$

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ $\quad |\phi_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} |\psi\rangle$, $\in \mathcal{D}$

př: $\hat{x} : \psi(x) \to x\psi(x)$

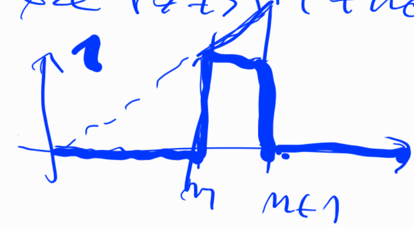
Def: norma $\|A\| = \sup\limits_{\|\psi\|=1} \|A\psi\|$ $\quad = \infty$ neomezený oper; konečné OMEZENÝ

Lin. operátor OMEZENÝ $\Leftrightarrow$ spojitý

spojitost .. $|\phi_n\rangle \to |\phi\rangle$ pak $\hat{A}|\phi_n\rangle \to A|\phi\rangle$

-- OMEZENÝ op. def. na $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{H}$ lze rozšířit na $\mathcal{H}$

PŘ $\hat{x}$ není omezený pol. $|\phi_n\rangle$



$\|\phi_n\| = 1$

$\|\hat{x}\phi_n\| \to \infty \sim n^2$

operátor $\frac{d}{dx} : \psi(x) \to \psi'(x)$ .. neomezený

PŘ omez. operátor: $\hat{F} : c\int e^{2\pi i x' x}\psi(x')dx' = \hat{\psi}(k)$ $\quad L^1 \cap L^2$

$\|\psi\| = \|\hat{\psi}\|$ .. unitární tj. OMEZENÝ