$\boxed{\text{QMI-3}}$ Formalismus QM II (spojité a nekonečné syst.)

$\boxed{\text{OPAKOVÁNÍ}}$ ① Stavový prostor $\mathcal{H}$ .. Hilbertův prostor
$\equiv$ LVP + skalární souč. + úplnost

ket vektory $|\psi\rangle$ .. $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — $\psi(x)$ $\boxed{e^{ikx}}$

báze $\quad I = \sum_n |n\rangle\langle n| = \int |x_0\rangle\langle x_0|\,dx_0$

distribuce $\langle x|x_0\rangle \equiv \phi_{x_0}(x) = \delta(x-x_0)$

Bra-vektory $\langle\psi|$ .. lineární funkcionály na $\mathcal{H}$, spoj. OMEZENÉ(?)

$\mathcal{S}(\,) \hookrightarrow \mathcal{H}^* \equiv \mathcal{H} \supset \mathcal{H}$ $\quad$ např. funkce $\in C^\infty$

Gelfandův triplet — test fce … dostatečně rychle ubývající pro $x \to \infty$

② Pozorovatelné $\hat{A}$

lineární operátory na $\mathcal{H}$: $\hat{A}: \mathcal{D}(\hat{A}) \to \mathcal{R}(\hat{A})$; $\mathcal{D}, \mathcal{R} \subset \mathcal{H}$

hustě definované $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{H}$

- Sdružený operátor, hermitovskost × samosdruženost

Def: $\langle\psi, A\varphi\rangle = \langle A^+\psi, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\hat{A})$

pozn: $F_\psi(\varphi) = \langle\psi, A\varphi\rangle^*$ … funcionál $F(\varphi)$ pokud je takové ψ, že F spojitý

Riesz lemma $\Rightarrow \exists\ |f\rangle$ .. $F(\varphi) = \langle f|\varphi\rangle$

pak def $A^+|\psi\rangle = |f\rangle$ $\quad \psi \in \mathcal{D}(A^+)$

- Samosdruž. operátor … $\hat{A}^+ = \hat{A}$ $\quad (\text{tj. } \mathcal{D}(\hat{A}^+) = \mathcal{D}(\hat{A}))$
- Symetrický (Hermitovský) $\langle\hat{A}\varphi, \psi\rangle = \langle\varphi, \hat{A}\psi\rangle$ $\quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\hat{A})$ (ks ken dim prost.)

(silnější podm.

$= \langle\psi|A^+|\varphi\rangle^*$

Samosdruž. $\Rightarrow$ symetrický
ale ne naopak

měřitelné veličiny ≡ Samosdruž. operátory = spektr. rozklad.

věta o sp. rozkladu se dá DK pro

Spektrum lineárního operátoru

v kon. $\hat{A}|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle \iff |A - \lambda I| = 0 \quad \sigma(A) = \{\lambda\}$

v ∞ dim:

OBECNÁ DEF. A nemusí samosdruž

Def: (spektr. lin operátoru) $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme bodem spektra oper $\hat{A}$: $\lambda \in \sigma(\hat{A})$ pokud $(\hat{A} - \lambda \hat{I})$ není prosté a na $\mathcal{H}$.

Případy: (i) $[A - \lambda I]$ není prosté, tj $\exists |\psi\rangle \neq 0 \quad (A - \lambda I)|\psi\rangle = 0$

$\psi \in \mathrm{Kerr}(A - \lambda)$ -- $\lambda \in \sigma_p(\hat{A})$ bodové spektrum (diskrétní)

(ii) $(A - \lambda I)$ prosté, ale $\mathcal{R}(A - \lambda I) \neq \mathcal{H}$

a) $\overline{\mathcal{R}(A - \lambda)} = \mathcal{H}$ tj $\mathcal{R}$ je hustá v $\mathcal{H}$: $\lambda \in \sigma_c(A)$ continuous spojité spektrum

b) $\overline{\mathcal{R}} \neq \mathcal{H}$ $\lambda \in \sigma_R$ reziduální sp.

speciálně pro:

Normální operátor: $[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 0$

$\lambda \in \sigma(A) \iff \exists \varphi_n \in \mathcal{H}, \|\varphi_n\| = 1$

$\lim_{n \to \infty} \|(A - \lambda)|\varphi_n\rangle\| = 0$

dá se DK

de def : $|\psi\rangle = \lim |\varphi_n\rangle$ -- $\boxed{A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle}$ $\boxed{\text{zobecněný vl. vektor}}$

↳ není v $\mathcal{H}$ ale je v $\mathcal{H}$

Prakticky Samosdružený operátor $\hat{A}$

$\exists$ úplná množina (zobecněných) vlastní funkcí (stavů)

→ spektrální rozklad -- rozklad $\hat{I}$

$\sigma(\hat{A}) = \sigma_B(\hat{A}) \cup \sigma_C(\hat{A})$

$\sigma_B(\hat{A})$ .. $|a_n, \alpha\rangle$ $|a_n, k\rangle$ $|a_n\rangle$ (n = ; spojitý ; diskrét případ)

$\sigma_C(\hat{A})$ .. $|a, \alpha\rangle$ $|a, k\rangle$ $|a\rangle$

$$P_n = |a_n\rangle\langle a_n| \quad \left(\sum_k |a_n,k\rangle\langle a_n,k|\right) \quad \left(\int d\alpha\, |a_n\alpha\rangle\langle a_n\alpha|\right.$$

$$P_a = |a\rangle\langle a| \quad \left(\sum_k |a,k\rangle\langle a,k|\right) \quad - \sim -$$

$$\hat{I} = \sum_{a\in\sigma_B} \hat{P}_a + \int_{a\in\sigma_C} da\, \hat{P}_a \quad \left(\sum_n \hat{P}_n + \int_a da\, \hat{P}_a\right)$$

$$\equiv \sum\!\!\!\!\!\!\int_a \hat{P}_a \equiv$$

$$\hat{A} = \sum\!\!\!\!\!\!\int_a a P_a \equiv \sum_{a\in\sigma_B} a\hat{P}_a + \int_{a\in\sigma_C} da\, a\hat{P}_a \qquad P^2 = P$$

$$\langle a_n k | a_{n'}, k'\rangle = \delta_{nn'}\delta_{kk'} \qquad \text{atd.}$$

např. $\langle a,k | a_n, \alpha\rangle = 0$

$$\langle a,k | a', k'\rangle = \delta(a-a')\delta_{kk'}$$

$$\langle a,\alpha | a', \alpha'\rangle = \delta(a-a')\delta(\alpha-\alpha')$$

$$\hat{P}_n \hat{P}_{n'} = \delta_{nn'}\hat{P}_n$$

$$\hat{P}_n \hat{P}_a = 0$$

$$\hat{P}_a \hat{P}_{a'} = \delta(a-a')\hat{P}_a$$

PR: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \quad |\psi\rangle \sim \psi(x,y,z)$

$$\hat{X} \ \ldots \quad \hat{X}\psi(x,y,z) = x\,\psi(x,y,z) \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$|x, \underbrace{y,z}_{\alpha}\rangle \qquad \hat{P}_x = \underbrace{\int dy \int dz}_{\int d\alpha} |x,y,z\rangle\langle x\,y\,z|$$

Pozn. o podstatě projektoru $\hat{P}_a \equiv |a\rangle\langle a|$ $\quad |x_0\rangle\langle x_0|$

$$\hat{P}_a \to \hat{P}_{a\in\Omega} = \int_\Omega da\, \hat{P}_a$$

matematicky dobře def. objekt

Ω

x_0

není operátor v $\mathcal{H}$

P_{x_0}

$$M_{xx'} \equiv \langle x|x_0\rangle\langle x_0|x'\rangle$$

$$\delta(x-x_0)\delta(x'-x_0)$$

divný

poznámka: matematicky se dá spektr. rozklad df projektorýma mírama

$$\hat{I} = \int_{a\in\sigma} \hat{P}_a \quad \longleftrightarrow \quad \hat{E}(\lambda) = \boxed{\int_{\substack{a\in\sigma \\ a<\lambda}} \hat{P}_a} \qquad \left.\frac{d\hat{E}(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=a} = \underbrace{\hat{P}_a}_{|a\rangle\langle a|}$$

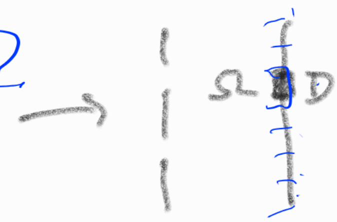
Doplnění k axiomům QM

(A1) Stav systému je dán paprskem v $\mathcal{H}$ ... Hilbert. pr.

(A2) Každé pozorovatelné odpovídá samosdružený lin. operátor, jehož spektrum udává možné výsledky měř.

(A3) Výsledky měření předpovídáme pomocí spektr. rozkladu operátoru $\hat{A}$ JAK?)

- v okamžiku měření syst. ve stavu $|\psi\rangle$
- hustota pravd. nalezení hodnoty a



$$p_\psi(a)\, da = \langle\psi|\hat{P}(a)|\psi\rangle\, da$$

(pravd. naměření $a \in \Omega$) $p = \int_\Omega p_\psi(a)\, da$

stav po měření: TRUE/FALSE →

- true $|\psi'\rangle = \int_\Omega P(\hat{a})\, da\, |\psi\rangle$
- false $|\psi'\rangle = \left(I - \int_\Omega P(\hat{a})\, da\right)|\psi\rangle$

$\boxed{\sigma(\hat{A}) = \bigcup_i \Omega_i}$ OBECNĚ výsledek měření i_0 $|\psi'\rangle_{i_0} = \int_{\Omega_i} P(\hat{a})\, da\, |\psi\rangle$

normování: předp $\|\psi\| = 1$ jinak $p(a) = \dfrac{\langle\psi|\hat{P}_a|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$

a $1 = \int da\, p(a)$ normování pravd.

DX: $\hat{I} = \oint da\, P_a \qquad \langle\psi| \circ |\psi\rangle$

$\rightarrow \quad 1 = \oint da \langle\psi|P_a|\psi\rangle = \oint da\, p(a)$

PŘ: hustota pravd nalezení částice v místě x

$\longrightarrow x \qquad |x\rangle \quad \ldots \quad P_x = |x\rangle\langle x|$

$$p(x) = \langle\psi|\hat{P}_x|\psi\rangle = \underbrace{\langle\psi|x\rangle}_{\psi^*(x)} \underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} = |\psi(x)|^2$$

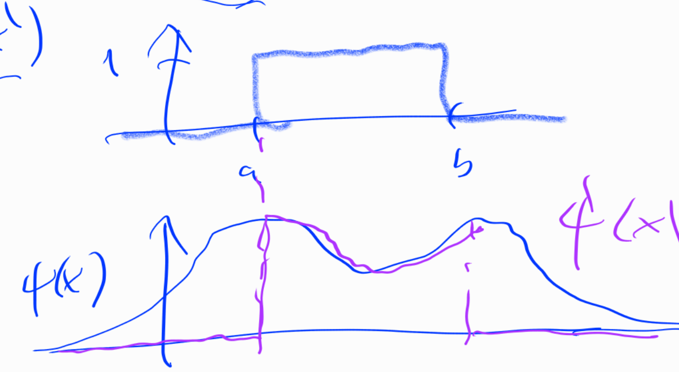
pravd výskytu částice v místě $\Omega \equiv \langle a,b\rangle$

$$p_\Omega = \int_\Omega p(x)\,dx = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx = \langle\psi| \underbrace{\int_a^b \hat{P}_x\, dx}_{\hat{P}_{x\in\Omega}} |\psi\rangle$$

$$|\psi'\rangle = \hat{P}_{x\in\Omega}|\psi\rangle$$

$$\psi'(x) = \langle x|\psi'\rangle = \langle x|\hat{P}_{x\in\Omega}|\psi\rangle = \langle x|\int_\Omega dx' \overbrace{|x'\rangle\langle x'|}^{P_{x'}}\psi\rangle$$

$$= \int_a^b dx' \underbrace{\langle x|x'\rangle}_{\delta(x-x')} \underbrace{\langle x'|\psi\rangle}_{\psi(x')} = \chi_{\langle a,b\rangle}(x)\,\psi(x)$$



Pozn: Statistika spojitých náhod. proměnných.

$\hat{A} \;\ldots\; a \qquad \langle\hat{A}\rangle \qquad p_\psi(a) = \langle\psi|\hat{P}_a|\psi\rangle$

střední hodnota $\langle\hat{A}\rangle = \int a\, p(a)\,da = \int a \langle\psi|P_a|\psi\rangle\, da \qquad A = \int da\, a P_a$

$\langle A\rangle \equiv \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ dma def. vyšší momenty náhod prom. a

$$\langle A^n \rangle \equiv \int a^n p(a)\, da = \langle \psi | \hat{A}^n | \psi \rangle$$

funkce náhod. prom $\langle f(A) \rangle \equiv \langle \psi | f(\hat{A}) | \psi \rangle$

variance (rozptyl, střední kvadr. odch.)

$$\sigma_a^2 = (\Delta A)^2 \equiv \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

konec