QMI-6 Kvantová statistika – smíšené stavy, matice hustoty

(dodatek k formalismu QM)

Motivace: 1, měření $\hat{A}$ ve stavu $|\psi\rangle$; 2, měření $\hat{B}$

$$\hat{A} = \sum_n a_n \hat{P}_n \quad \begin{cases} a_1 \ \cdots \ p_1 = \langle\psi|P_1|\psi\rangle \ \cdots \ |\psi_1\rangle = P_1|\psi\rangle \frac{1}{\sqrt{p_1}} \\ a_2 \ \cdots \ p_2 = \langle\psi|P_2|\psi\rangle \ \cdots \ |\psi_2\rangle = P_2|\psi\rangle \frac{1}{\sqrt{p_2}} \\ \vdots \end{cases} \Bigg\} \hat{\rho} \ \cdots \ \text{měření } B$$

$P_n^{(B)}|\psi_i\rangle$

- **Statistický soubor:** $\{|\psi_i\rangle, p_i\}_{a_i \in \sigma(A)}$ $\qquad \langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$

(stav po měření $\hat{A}$) $\qquad \sum_i p_i = 1$

měření $\hat{B} = \sum_n b_n P_n^{(B)}$

b_n ... s pravd. $\langle\psi_i|\hat{P}_n^{(B)}|\psi_i\rangle = p_n^{(i)}$ měření

vím že ve sta $|\psi_i\rangle$

neznám výsl. 1. měření vážený průměr ... $p_n = \underbrace{\sum_i \langle\psi_i|\hat{P}_n^{(B)}|\psi_i\rangle p_i}_{\text{stat. soub.}}$

↳ báze vl. v. $\hat{B} = \{|b_n,\alpha\rangle\}$ ... $P_n^{(B)} = \sum_\alpha |b_n\alpha\rangle\langle b_n\alpha|$

- $p_n = \sum_i \sum_\alpha \langle\psi_i|b_n\alpha\rangle\langle b_n\alpha|\psi_i\rangle p_i$

$$= \sum_\alpha \langle b_n\alpha|\underbrace{\sum_i |\psi_i\rangle p_i \langle\psi_i|}_{\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|}b_n\alpha\rangle = \sum_\alpha \langle b_n\alpha|\hat{\rho}|b_n\alpha\rangle$$

$\langle b_n|\hat{\rho}|b_n\rangle$

$$= \sum_\alpha \langle b_n\alpha|\, \mathbb{I}\, \rho\, \mathbb{I}\, |b_n\alpha\rangle = \sum_{m,m'}\sum_\alpha \langle b_n\alpha|m\rangle\langle m|\rho|m'\rangle\langle m'|b_n\alpha\rangle$$

$\sum_m |m\rangle\langle m|$ -- libovolná ON báze v $\mathcal{H}$

$$= \sum_{m,m'} \underbrace{\langle m|\rho|m'\rangle}_{\rho_{mm'}} \langle m'|\underbrace{\sum_\alpha |b_n\alpha\rangle\langle b_n\alpha|}_{P_n^{(B)}}|m\rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\, \hat{P}_n^{(B)}\right)$$

SHRNUTÍ:

stat. soubor $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$ ... $P_n^{(B)}$ ... měření

$$p_n^{(B)} = \sum_\alpha \langle b_n\alpha|\rho|b_n\alpha\rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\, P_n^{(B)}\right)$$

Def: nechť $\{|\psi_i\rangle, p_i\}_{i\in M}$ je stac. soubor stavů:

$\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1 \quad \sum_{i\in M} p_i = 1 \quad$ (ne nutně $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$)

matice hustoty $\quad \boxed{\hat\rho \overset{def}{=} \sum_{i\in M} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|}$ $\quad$ Ballenti (stav syst $\hat\rho$)

statistický operátor

USUVKA .. matematická — stopa

$\mathrm{Tr}\, M$ (matice) $\equiv \sum_i M_{ii}$

stopa operátoru v $\mathcal{H}$ ... $\{|n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ .. $\boxed{\mathrm{Tr}\,\hat A \underset{def}{\equiv} \sum_n^{\infty} \langle n|\hat A|n\rangle}$

v libovolné ON bázi vyjde stejně

vlastnosti:

- $\mathrm{Tr}\{AB\} = \sum_{mn} \langle m|A|n\rangle\langle n|B|m\rangle = \mathrm{Tr}\{BA\}$

$\mathrm{Tr}\{ABC\} = \mathrm{Tr}\{BCA\} \neq \mathrm{Tr}\{BAC\}$ $\quad$ cyklicita

- záměna báze ... $|\bar n\rangle = U|n\rangle$

$\bar A = \langle\bar m|A|\bar n\rangle = \langle m|U^+ A\, U|n\rangle \quad$ matice $\; U^+ A U = \bar A$

$\mathrm{Tr}\{U^+ A \underbrace{U\, U^+}_{I} B U\} = \mathrm{Tr}\{AB\underbrace{UU^+}_{I}\} = \mathrm{Tr}(AB)$

tj. invariant $\to$ nezáv. na bázi

dokonce ... $\hat A$ ... v x-repr. ..

$\mathrm{Tr}\,\hat A = \sum_x \langle x|\hat A|x\rangle$ tj. $\int dx\, \langle x|A|x\rangle$

konec usuvky $\quad$ konec usuvky

normalizace: $\boxed{\mathrm{Tr}\,\hat\rho = 1}$

$\langle\psi_i|\psi_j\rangle \neq \delta_{ij}$

$\sum_n \langle n|\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| p_i |n\rangle = \sum_{n,i} \langle\psi_i|n\rangle\langle n|\psi_i\rangle p_i \qquad I = \sum_n |n\rangle\langle n|$

$= \sum_i \underbrace{\langle\psi_i|\psi_i\rangle}_{=1} p_i = \sum_i p_i = 1$

měření ... pravidla použití $\hat\rho$ pro popis měř. $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$

- **střední hodnota $\hat A$:** $\boxed{\langle A\rangle = \mathrm{Tr}\{\rho A\}}$

$$\langle A\rangle = \sum_i p_i \langle A\rangle_i = \sum_i p_i \langle\psi_i|\hat A|\psi_i\rangle = \sum_n \langle n|\hat A \underbrace{\sum_i |\psi_i\rangle p_i \langle\psi_i|}_{\rho} n\rangle$$

$$I = \sum_n |n\rangle\langle n|$$

$$= \mathrm{Tr}\{\hat A\hat\rho\} = \mathrm{Tr}\{\hat\rho\hat A\}$$

- **pravděpodobnost nalezení systému ve stavu $|\phi\rangle$**

(měřím veličinu $\hat A = |\phi\rangle\langle\phi|$ $\begin{cases} 1 & \dots |\phi\rangle \\ 0 & \dots |\phi'\rangle : \langle\phi'|\phi\rangle = 0\end{cases}$

$$p_\phi = \boxed{\langle\phi|\rho|\phi\rangle} = \mathrm{Tr}\{\rho|\phi\rangle\langle\phi|\} = \boxed{\mathrm{Tr}\{\rho P_\phi\}}$$

$$p_n = \mathrm{Tr}\{\rho|\phi\rangle\langle\phi|\}$$

$$\sum_n \langle n|\rho|\phi\rangle\langle\phi|n\rangle \qquad I = \sum_n |n\rangle\langle n|$$

- **pravděpodobnost nalezení jednoho ze stavů množiny $\{|\phi_i\rangle\}$** - kde $\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}$

b ... $|b\alpha\rangle \equiv |\phi_\alpha\rangle$ ... $\hat A = \hat P = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ $\begin{cases}1\\0\end{cases}$

$$\boxed{p_1 = \mathrm{Tr}\{\rho P\}} \quad \dots \quad \boxed{p_b = \mathrm{Tr}\{\rho P_b\}}$$

$$P^2 = P \Rightarrow p = \mathrm{Tr}\{\rho P^2\} = \mathrm{Tr}\{P\rho P\}$$

- **stav po měření:** $\{|\psi_i\rangle, p_i\} \xrightarrow[P_b]{b} \bigcup_b \{\hat P_b|\psi_i\rangle, p_b p_i\}$

nová matice hustoty po měření B.

1) - vím že jsem naměřil b ... $\left\{\frac{\hat P_b|\psi_i\rangle}{\sqrt{p_b}}, p_i\right\}$

$$\tilde\rho_b = \sum_i \frac{\hat P_b|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat P_b}{p_b} p_i = \boxed{\frac{P_b\hat\rho P_b}{\mathrm{Tr}\{P_b\rho P_b\}}} \quad \dots \mathrm{Tr}\,\tilde\rho = 1$$

2) nevím co jsem měřil (nepodíváme se na výsl.)

$$\tilde{\rho} = \sum_i \sum_b \frac{P_b |\psi_i\rangle\langle\psi_i| P_b}{\cancel{p_b}} \, p_i \cancel{p_b} = \boxed{\sum_b \hat{P}_b \rho \hat{P}_b}$$

VLASTNOSTI operátoru $\hat{\rho}$

• 1 $\boxed{\hat{\rho}^+ = \hat{\rho}}$ samosdruž. $\left(\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \, p_i\right)^+ = \hat{\rho}$

• 2 $\boxed{\langle n|\hat{\rho}|n\rangle \geq 0}$ $\forall |n\rangle$ .. Pozit. definitnost.

$$\sum_i \underbrace{|\langle n|\psi_i\rangle|^2}_{\geq 0} \underbrace{p_i}_{\geq 0} \geq 0$$

• 3 spektrum

• 1 ⇒ vl. č. $\lambda \in \mathbb{R}$; • 2 ⇒ $\lambda \geq 0$ $\langle\psi_\lambda|\rho|\psi_\lambda\rangle = \lambda$

$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1 = \sum_\lambda \langle\psi_\lambda|\hat{\rho}|\psi_\lambda\rangle = \sum_\lambda \lambda = 1 \Rightarrow \lambda \leq 1$

→ $\boxed{\lambda \in \langle 0, 1\rangle}$ .. $|\psi_\lambda\rangle$ .. ON báze v $\mathcal{H}$

• 4 Platí $\boxed{\mathrm{Tr}\,\rho^2} = \sum_\lambda \lambda^2 \leq \sum_\lambda \lambda = \mathrm{Tr}\,\rho = \boxed{1}$

možnosti

$\boxed{\mathrm{Tr}\,\rho^2 = 1}$ ... **čistý stav** ... $\sum_\lambda \lambda = 1 = \sum_\lambda \lambda^2$

→ $\exists!\, \lambda = 1$ ... $|\psi_1\rangle$ $\quad \lambda^2 = \lambda$ .. $\lambda = 0, 1$

+ ost. $\lambda = 0$

⇒ $\rho = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ $\left(= \sum_\lambda |\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda| \lambda\right)$

spektrální rozklad ale jen jedno $\lambda \neq 0$

→ ρ stat. soubor $\{|\psi_1\rangle, p_1 = 1\}$

↳ jediný stav s pravděpodobn. jistotou proto **čistý**

$\boxed{\mathrm{Tr}\,\rho^2 < 1}$ **smíšený stav** ... nebo **nekoherentní stav**

POZNÁMKA K TERMINOLOGII:

koherentní / nekoherentní superpozice stavů

$|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$

koherentní superp. ~

$$|\psi\rangle = \alpha_1 |\phi_1\rangle + \alpha_2 |\phi_2\rangle$$

.. $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$

$p_1 = |\alpha_1|^2$

$p_2 = |\alpha_2|^2$

nekoherentní superp.

$$\{(|\phi_1\rangle, p_1), (|\phi_2\rangle, p_2)\}$$

$$\rho = p_1 |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + p_2 |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$$

$\boxed{\text{ČASOVÝ VÝVOJ}}$

$|\psi_0\rangle$ .. $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$

$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle\psi| = \langle\psi| H$

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi_0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\psi_0\rangle$$

$\hat{\rho}$ .. $\{|\psi_i\rangle, p_i\} \xrightarrow{t} \{|\psi_i(t)\rangle, p_i\}$

$$\hat{\rho} = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| p_i \qquad \hat{\rho} = \sum_i |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)| p_i$$

$U|\psi\rangle \quad \langle\psi|U^+$

- $\boxed{\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\, \hat{\rho}_0\, \hat{U}^+(t)}$ pro $\frac{d}{dt} H = 0$

explicitní vyjádření pro časově nezáv. H

- $$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = i\hbar \frac{d}{dt} \sum_i |\psi_i(t)\rangle p_i \langle\psi_i(t)|$$

$$= \hat{H} \sum_i |\psi_i(t)\rangle p_i \langle\psi_i(t)| - \sum_i |\psi(t)\rangle p_i \langle\psi| \hat{H}$$

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]}$$

časový vývoj matice hustoty

OBECNÉ VYJÁDŘENÍ PLATNÉ I PRO ČASOVĚ ZÁVISLÝ H

≡ KVANTOVÁ LIOUVILLOVA ROVNICE