## Domácí úlohy - Speciální teorie relativity

1. Mějme dány tři inerciální systémy IS, IS' a IS", jejichž odpovídající osy jsou paralelní a v čase $t = t' = t'' = 0$ se jejich počátky právě přesně míjejí. IS' se vůči IS pohybuje rychlostí $v_1$ v kladném směru osy $x$. IS" se vůči IS' pohybuje rychlostí $v_2$ v kladném směru osy $x'$.

   (a) Jak bude vypadat přímá transformace z IS do IS"? Jaká rychlost $v_3$ ji bude definovat?

   (b) Jaké délky hran naměří pozorovatelé v IS a IS" pro krabici, která je v klidu v IS', její hrany jsou paralelní s osami a vůči IS' mají všechny hrany stejnou délku $a$?

   (c) Mějme pevně danou rychlost $v_1$. Pro pozorovatele v IS jdou hodiny v IS' pomaleji, než jeho vlastní hodiny. Jaká musí být rychlost $v_2$, aby z hlediska pozorovatele v IS šly hodiny v IS" dvakrát pomaleji než jeho vlastní hodiny v IS?

   (d) V IS' se stanou dvě události vzdálené 400000 km od sebe a druhá proběhne jednu sekundu po první. Jaká musí být rychlost $v_2$, aby se z hlediska IS" jevily současné?

2. Nechť železničním nádražím projíždí konstantní rychlostí $v$ vlak klidové délky $l_0$. V okamžiku, kdy zadní konec vlaku projíždí těsně kolem světelné signalizace, se na ní rozsvítí světlo. Jak dlouho bude trvat, než světelný signál dorazí k přednímu konci vlaku:

   - z hlediska pozorovatele ve vlaku
   - z hlediska pozorovatele na nádraží

3. Které z následujících rovnic nemohou být korektní tenzorové rovnice a proč?

   (a) $A^\mu + B^\nu = 0$

   (b) $\eta_{\mu\nu} T^{\mu\rho\delta} = T_\nu{}^{\rho\delta}$

   (c) $V^\mu W^\nu C_\rho = U^{\mu\nu}{}_\rho$

   (d) $H^\alpha{}_\alpha V^\alpha W^\beta = D^\beta$

4. Které z následujících rovnic nejsou správné fyzikální rovnice a proč?

   (a) $p_\mu p^\mu + m^2c^2 = 0$
   (b) $m_0 u^\mu = p_\mu$
   (c) $\frac{dp^\mu}{dt} = F^\mu$
   (d) $\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2$

5. Lorentzovy transformace (boosty) v různých směrech nekomutují. Složení dvou takových transformací není pouze Lorentzova transformace ve směru vzniklém kompozicí původních, ale získáme také dodatečnou rotaci. Obecně se tomuto jevu říká Thomasova precese.

   Vaší úlohou bude demonstrovat tento efekt ve zjednodušené podobě. Budeme k tomu potřebovat Lorentzovy transformace do dvou kolmých směrů $x$ a $z$. Pokud budeme pracovat ve čtyřrozměrném prostoročase se souřadnicemi $(ct, x, y, z)$ má Lorentzova transformace do kladného směru osy $x$ (tedy transformace do systému letícího rychlostí $v$ ve směru osy $x$) tvar

$$\Lambda_x(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Nyní pomocí této transformace nejprve odvoďte Lorentzovu transformaci do systému pohybujícího se rychlostí velikosti $u$, která je kolmá k ose $y$ a svírá s osou $x$ úhel $\alpha$. Pro odvození je vhodné použít nejprve matici rotace $R(\alpha)$ kolem osy $y$ (uvědomte si, že pro rotace platí $t' = t$ a vzpomeňte si na matici rotace ve třech dimenzích, která bude tvořit prostorovou část té čtyřrozmněrné), která osu $x$ otočí do směru rychlosti, následně použijete výše uvedenou Lorentzovu transformaci do směru $x$ a opačnou rotací vrátíte osu $x$ do původního směru. Celou operaci popisuje maticový součin $R(-\alpha)\Lambda_x(u)R(\alpha)$.

   Pomocí předchozího výsledku napište, jak vypadá $\Lambda_z(v)$ - tedy Lorentzova transformace do systému letícího rychlostí $v$ ve směru osy $z$. Uvědomte si, jak vypadají transformační matice do směrů opačných ($\Lambda_x(-v)$ a $\Lambda_z(-v)$), tedy odpovídající opačným rychlostem.

   Nyní si představíme gyroskop, jehož osa nám dobře zachovává směr při transportu, pokud nebudeme na osu působit momentem síly. Tento gyroskop, který nám definuje lokální souřadný systém, nyní přetransportujeme po malé čtvercové smyčce v rovině $x, z$ rychlostí $v$. Tedy se z původně klidového systému postupně ocitne v systému letícím ve směru osy $+x$, poté v systému letícím ve směru $+z$, pak $-x$ a nakonec $-z$. Celkem tomuto procesu odpovídá transformační matice

$$T = \Lambda_z(-v)\Lambda_x(-v)\Lambda_z(v)\Lambda_x(v)$$

Nyní tuto transformaci aplikujte na vhodný jednoduchý vektor (například $w = (0, 1, 0, 0)$). Pokud by se gyroskop definující souřadný systém při transportu nepootočil, měli bychom dostat stejný vektor $w$. Ovšem k jeho změně dojde. Na konci výpočtu použijte předpoklad $v \ll c$ a Taylorova rozvoje do čtvrtého řádu. Určete jakého řádu ve $v/c$ je efekt pootočení.

Byl by tento efekt přítomen pokud by Lorentzovy transformace v různých směrech komutovaly? Vysvětlete.