

Proseminář z teoretické fyziky - NOFY070

Zápočtový problém 1

Termín odevzdání 27.4.2026

Odevzdávejte prostřednictvím modulu Studijní mezivýsledky v SISu.

V případě potíží mě kontaktujte emailem na adrese: ota@matfyz.cz

Řešení úkolu bude hodnoceno buď jako správné nebo jako neúplné. Neúplná řešení budou vrácena k dopracování.

Zadání:

- a) Nalezněte Greenovu funkci $G(x, y)$ operátoru $-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{6}{x^2}$ na intervalu $\langle \epsilon, 1 \rangle$ (kde $\epsilon \in (0, 1)$) vyhovující Dirichletovým okrajovým podmínkám. Tedy nalezněte řešení rovnice

$$-\frac{d^2}{dx^2}G(x, y) + \frac{6}{x^2}G(x, y) = \delta(x - y), \quad x, y \in \langle \epsilon, 1 \rangle,$$

splňující

$$G(\epsilon, y) = G(1, y) = 0.$$

Ověřte, že platí $G(x, y) = G(y, x)$.

- b) Proveďte limitu nalezené Greenovy funkce pro $\epsilon \rightarrow 0$

$$G_0(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(x, y)$$

a ověřte, že výsledná Greenova funkce G_0 splňuje Dirichletovy okr. podmínky v $x = 0$.

- c) Nalezněte řešení rovnice

$$-\frac{d^2}{dx^2}f(x) + \frac{6}{x^2}f(x) = j(x)$$

splňující Dirichletovy okr. podmínky na $\langle 0, 1 \rangle$, které je obecně dané vztahem

$$f(x) = \int_0^1 G_0(x, y)j(y)dy,$$

pro pravou stranu tvaru

$$j(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|.$$

- d) Pravou stranu a výsledek vykreslete nebo načrtněte.