

Proseminář teoretické fyziky

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

RNDr. Otakar Svítek, Ph.D.

NOFY070 LS: 0/2 Z – jaro 2026

Zápočtový problém č. 2

Řešení úkolu bude hodnoceno buď jako *správné* nebo jako *neúplné*. Neúplná řešení budou vrácena k dopracování. Termín odevzdání 2. zápočtového problému je 18. května 2026. Řešení v elektronické formě nahrajte v SISu v modulu studijní mezivýsledky nebo v případě potíží pošlete na adresu otakar.svitek@matfyz.cuni.cz

Uvažujeme dvoukomponentové reálné pole Φ^A , tj. pole nabývající hodnot v dvojdimenzionálním reálném vektorovém prostoru. Komponenty z tohoto prostoru budeme číslovat velkými písmeny $A, B, \dots = 1, 2$.

Na tomto prostoru mějme skalární součin zadaný pomocí metriky H_{AB}

$$(\Phi, \Psi) = H_{AB} \Phi^A \Psi^B .$$

Metrika H_{AB} je nedegenerovaná pozitivně definitní s inverzí H^{AB} a budeme ji používat pro snižování a zvyšování polních indexů.

Dále mějme tzv. komplexní strukturu kompatibilní s tímto součinem – operátor J^A_B splňující

$$J^2 = -I , \quad (J \cdot \Phi, J \cdot \Psi) = (\Phi, \Psi) ,$$

kde I je jednotkový operátor. V komponentách to znamená

$$J^A_N J^N_B = -I^A_B , \quad H_{MN} J^M_A J^N_B = H_{AB} \Rightarrow J^M_A H_{MB} = -H_{AN} J^N_B ,$$

což jsou vztahy využitelné pro komutaci matic H_{AB} a J^A_B .

(Pozor, nezaměňte komplexní strukturu J^A_B a elektrický tok – ten budeme značit \mathcal{J}^μ .)

Pole Φ^K se nazývá nabitě skalární pole. Jeho interakce s elektromagnetickým polem je zachycena akcí

$$S_{\text{NP}}[\Phi^N, A_\mu] = -\frac{1}{2} \int_\Omega \left[H_{AB} D_\mu \Phi^A D_\nu \Phi^B \eta^{\mu\nu} + M^2 H_{AB} \Phi^A \Phi^B \right] d^4\Omega ,$$

4-potenciál A_μ elektromagnetického pole se skrývá v kovariantní derivaci D definované na polním vektorovém prostoru

$$D_\mu \Phi^K = \nabla_\mu \Phi^K - e A_\mu J^K_L \Phi^L .$$

Zde $\eta_{\mu\nu}$ je Minkowského metrika, ∇_μ derivace v prostoročasu a e náboj pole. Poznamenejme, že pro kovektor Σ_K s indexem dole je kovariantní derivace dána

$$D_\mu \Sigma_K = \nabla_\mu \Sigma_K + e A_\mu \Sigma_L J^L_K .$$

Akce elektromagnetického pole byla diskutována na přednášce,

$$S_{\text{EM}}[A_\mu] = -\frac{\epsilon_0}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4\Omega .$$

Uvažujeme volbu jednotek $c = 1$.

- (i) Variací akce podle Φ^N nalezněte pohybovou rovnici pro pole.
(ii) Variací akce podle A_μ nalezněte elektrický 4-tok nesený tímto polem

$$\mathcal{J}_{\text{NP}}^\mu = \frac{\delta S_{\text{NP}}}{\delta A_\mu} .$$

- (iii) Ověřte, že akce je invariantní vůči kalibrační transformaci

$$\Phi \rightarrow \tilde{\Phi} = \exp(e\alpha J) \cdot \Phi , \quad A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \alpha$$

Zde $\exp(e\alpha J)$ je maticová exponenciála. Při důkazu využijte komutační vlastnosti J^A_B s H_{AB} a fakt, že J se chová jako komplexní jednotka.

- (iv) Rozštěpením prostoročasu na čas a prostor nalezněte Lagrangián pole $L_{\text{NP}}(\Phi^A, \dot{\Phi}^A)$. Zde je výhodné zavést prostorovou kovariantní polní derivaci $\vec{D}\Phi^K$ a kovariantní časovou derivaci $D_0\Phi^K$

$$\vec{D}\Phi^K = \vec{\nabla}\Phi^K - e\vec{A}J^K_L\Phi^L , \quad D_0\Phi^K = \dot{\Phi}^K + e\varphi J^K_L\Phi^L ,$$

kde φ a \vec{A} jsou elektromagnetický skalární a vektorový potenciál.

- (v) Určete nábojovou hustotu ρ_{NP} a tok náboje \vec{j}_{NP} asociované s polem

$$\rho_{\text{NP}} = -\frac{\delta L_{\text{NP}}}{\delta \varphi} , \quad \vec{j}_{\text{NP}} = \frac{\delta L_{\text{NP}}}{\delta \vec{A}} .$$

- (vi) Nalezněte hybnost pole

$$P_K = \frac{\delta L_{\text{NP}}}{\delta \dot{\Phi}^K} .$$

- (vii) Napište Hamiltonián pole $H_{\text{NP}}(\Phi^A, P_A)$.

- (viii) Jaký bude příspěvek nabitého pole Φ do Gaussovy vazby G vzniklé při budování hamiltonovského formalismu systému elektromagnetického a nabitého pole s akcí $S = S_{\text{EM}}(A) + S_{\text{NB}}(\Phi, A)$? Gaussova vazba vznikne stejným způsobem jak bylo diskutováno na přednášce, tj. jako sekundární vazba zajišťující konstantnost primární vazby $\kappa = 0$.

Poznámky na okraj:

Uvedený příklad je nejjednodušší případ interakce tzv. *kalibračního pole* (zde elektromagnetické pole) s hmotovým polem (pole Φ). Pole Φ popisuje kombinaci nabitého skalárního pole a antipole.

Vedle reálného formalismu užitého v tomto případě lze zavést též jednodimenzionální komplexní pole. Komplexní struktura J pak přejde na obyčejnou komplexní jednotku a reálný skalární součin daný metrikou H na skalární součin na komplexním jednodimenzionálním prostoru.

Kalibrační pole lze místo vektorového 4-potenciálu A_μ popsat též přímo *kovariantní derivací* D na polním prostoru. Z matematického hlediska se jedná o derivaci na *fibrovém prostoru*. Intenzita kalibračního pole $F_{\mu\nu}$ má pak interpretaci *křivosti* této derivace.

Kalibrační teorie jsou vždy invariantní vůči grupě kalibračních transformací. V našem případě se jedná o transformace zachovávající skalární součin. Čili kalibrační transformace tvoří v každém prostoročasovém bodě grupu $SO(2)$; z hlediska komplexního formalismu se častěji uvádí grupa $U(1) = SO(2)$. Invariance teorie lze zabezpečit, pokud je akce zapsána v *kovariantním tvaru* – pouze pomocí geometrických veličin jako jsou skalární součin a zobecněná kovariantní derivace.

Standardní model – současná teorie elementárních částic – je vystaven právě na základě teorie kalibračních polí. Kalibrační i hmotová pole jsou v tomto případě již složitější než jednoduché elektromagnetické a skalární pole, nicméně např. s interakčními členy vstupujícími do akce skrze zobecněnou kovariantní derivaci D se v obecné teorii setkáváme i nadále.