Ortogonální souřadnice v $\mathbf{E}^2$

Euklidovská metrika v $\mathbf{E}^2$ má jak v kartézských souřadnicích x, y tak v ortogonálních souřadnicích x^1, x^2 diagonální tvar

$$\boldsymbol{q} = \mathbf{d}x\,\mathbf{d}x + \mathbf{d}y\,\mathbf{d}y = h_{(1)}^2\,\mathbf{d}x^1\,\mathbf{d}x^1 + h_{(2)}^2\,\mathbf{d}x^2\,\mathbf{d}x^2\ .$$

Diagonální elementy $h_{(1)}$ a $h_{(2)}$ se nazývají Laméovy koeficienty.
Plošný element má tvar

$$dS = dx\,dy = h_{(1)}h_{(2)}\,dx^1\,dx^2\ .$$

Pomocí Laméových koeficientů lze zapsat některé diferenciální operátory v souřadnicích x^1, x^2. Konkrétně:
gradient skaláru: $\boldsymbol{a} = \nabla f$

$$a^k = \frac{1}{h_{(k)}}\,f_{,k}$$

divergence: $f = \nabla\cdot\boldsymbol{a}$

$$f = \frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}}\Big(\big(h_{(2)}\ a^1\big)_{,1} + \big(h_{(1)}\ a^2\big)_{,2}\Big)$$

dvoudimenzionální rotace: $f = \nabla\times\boldsymbol{a}$

$$f = \frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}}\Big(\big(h_{(2)}\,a^2\big)_{,1} - \big(h_{(1)}\,a^1\big)_{,2}\Big)$$

Laplaceův operátor:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}}\bigg(\Big(\frac{h_{(2)}}{h_{(1)}}\,f_{,1}\Big)_{,1} + \Big(\frac{h_{(1)}}{h_{(2)}}\,f_{,2}\Big)_{,2}\bigg)$$

Ve všech vztazích jsou použity souřadnice vektorů vzhledem k normalizované bázi $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Vztah k rotačně symetrickým souřadnicím v $\mathbf{E}^3$

Většina ortogonálních souřadnic v $\mathbf{E}^2$ lze použít ke konstrukci rotačně symetrických ortogonálních souřadnic v $\mathbf{E}^3$ a to rotací podél jedné z os. Nechť x, y, z jsou kartézské souřadnice v $\mathbf{E}^3$ a z je osa rotační symetrie. Vzdálenost od osy označíme ρ a úhel okolo osy φ. Rotačně symetrické souřadnice x^1, x^2, φ asociované s dvoudimenzionálními ortogonálními souřadnicemi x^1, x^2 jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} x &= \rho(x^1,x^2)\cos\varphi\ ,\\ y &= \rho(x^1,x^2)\sin\varphi\ ,\\ z &= z(x^1,x^2)\ . \end{aligned}$$

Zde funkční závislosti $\rho(x^1,x^2)$ a $z(x^1,x^2)$ jsou dány vztahy souřadnic x^1, x^2 k *dvoudimenzionálním kartézským souřadnicím* ρ, z, zúžené na polorovinu $\rho > 0$.
Euklidovská metrika v $\mathbf{E}^3$ má pak tvar

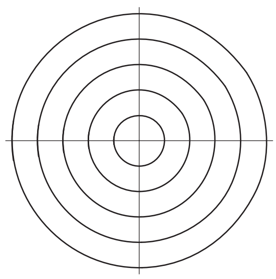
$$\boldsymbol{q} = \mathbf{d}x\,\mathbf{d}x + \mathbf{d}y\,\mathbf{d}y + \mathbf{d}z\,\mathbf{d}z = \mathbf{d}z\,\mathbf{d}z + \mathbf{d}\rho\,\mathbf{d}\rho + \rho^2\,\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi = h_{(1)}^2\,\mathbf{d}x^1\mathbf{d}x^1 + h_{(2)}^2\,\mathbf{d}x^2\mathbf{d}x^2 + \rho^2\,\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi\ .$$

Laméovy koeficienty pro rotačně symetrické souřadnice x^1, x^2, φ tedy jsou $h_{(1)}, h_{(2)}, \rho$.
Objemový element má tvar

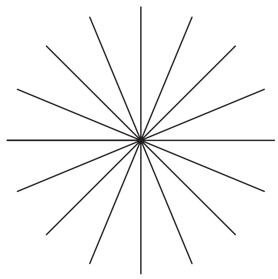
$$dV = h_{(1)}h_{(2)}\rho\,dx^1\,dx^2\,d\varphi\ .$$

Polární souřadnice v E^2

Jedná se o nejjednodušší ortogonální souřadnice (mimo souřadnic kartézských). Souřadnicové čáry jsou kružnice okolo společného počátku a radiální čáry jsou polopřímky.
Rotací polárních souřadnic se dostanou souřadnice *sférické*.



$\rho = \text{konst.}$



$\varphi = \text{konst.}$

hodnoty souřadnic:

$\rho \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$

pokrytá oblast:

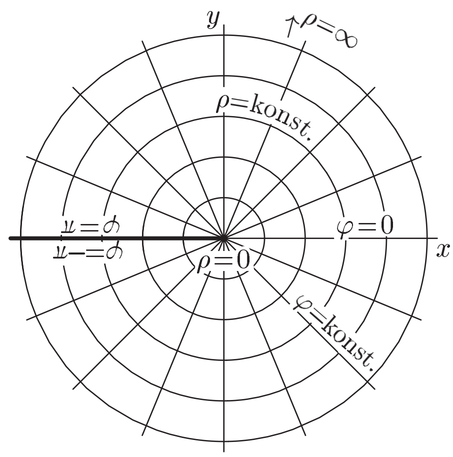
x, $y \in \mathbb{R}$

transformační vztahy:

$$x = \rho \cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho \sin\varphi \qquad \varphi = \arctan(y/x)$$

Laméovy koeficienty:

$$h_{(\rho)} = 1 \qquad h_{(\varphi)} = \rho$$

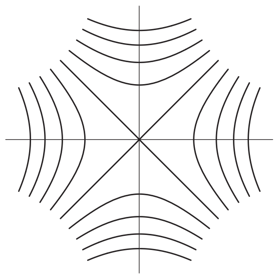


Souřadnice jsou regulární všude mimo počátku a jedné polopřímky, na které je nespojitá úhlová souřadnice φ.
Orientace popisek naznačuje směr růstu souřadnic.

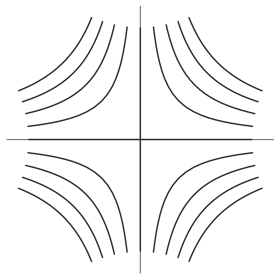
verze 1.07 (2021-02-27)

Hyperbolické souřadnice v E^2

Jedná se o souřadný systém, jehož souřadnicové čáry jsou hyperboly. Souřadnice pokrývají polorovinu v E^2 a je otázkou znaménkové konvence, která polorovina se zvolí. Pro jednoduchost se omezíme na volby $x > 0$ a $y > 0$.
Hyperbolické souřadnice jsou inverzní k souřadnicím parabolickým.
Rotací hyperbolických souřadnic se dostanou souřadnice *hyperboloidální* (*rotačně hyperbolické*).



$\kappa = $ konst.



$\lambda = $ konst.

hodnoty souřadnic:

$\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

pokrytá oblast:

varianta 1: $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}$
varianta 2: $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$

transformační vztahy:

$$x \overset{\text{var. 1}}{=} \sqrt{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}+\kappa} \overset{\text{var. 2}}{=} \frac{\lambda}{\sqrt{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}-\kappa}}$$

$$y \overset{\text{var. 1}}{=} \frac{\lambda}{\sqrt{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}+\kappa}} \overset{\text{var. 2}}{=} \sqrt{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}-\kappa}$$

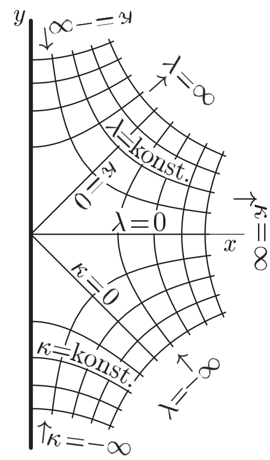
$$\kappa = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

$$\lambda = xy$$

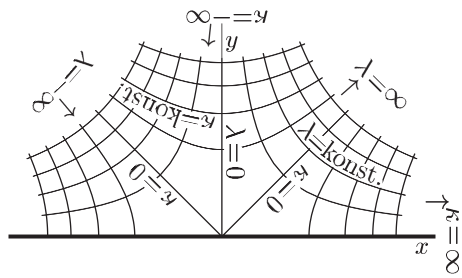
Laméovy koeficienty:

$$h^2_{(\kappa)} = h^2_{(\lambda)} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}$$

Souřadnice jsou ‘konformně kartézské’ – oba Laméovy koeficienty jsou shodné.



varianta 1

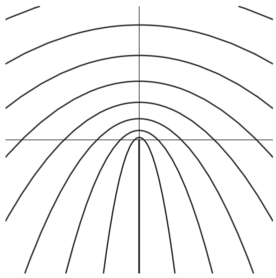


varianta 2

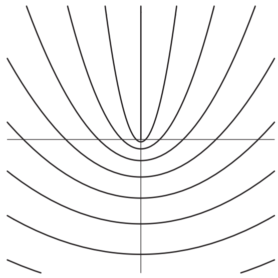
Orientace popisek naznačuje směr růstu souřadnic.

Parabolické souřadnice v E^2

Souřadný systém, jehož souřadnicové čáry jsou paraboly. Souřadnice pokrývají celou rovinu E^2 mimo jedné polopřímky, na které nejsou regulární. Je otázkou konvence, která polovina osy y se zvolí.
Parabolické souřadnice jsou inverzní k souřadnicím hyperbolickým.
Rotací parabolických souřadnic se dostanou souřadnice *paraboloidální* (*rotačně parabolické*).



$u = \text{konst.}$



$v = \text{konst.}$

hodnoty souřadnic:

varianta 1: $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^+$
varianta 2: $u \in \mathbb{R}^+$, $v \in \mathbb{R}$

pokrytá oblast:

$x,\, y \in \mathbb{R}$

transformační vztahy:

$$x = uv$$

$$y = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right)$$

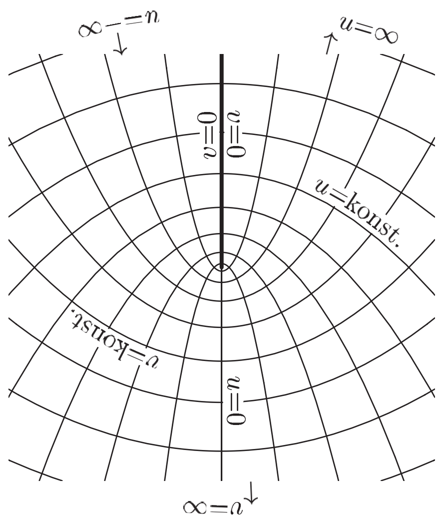
$$u \overset{\text{var. 1}}{=} \frac{x}{\sqrt{\sqrt{y^2+x^2}-y}} \overset{\text{var. 2}}{=} \sqrt{\sqrt{y^2+x^2}+y}$$

$$v \overset{\text{var. 1}}{=} \sqrt{\sqrt{y^2+x^2}-y} \overset{\text{var. 2}}{=} \frac{x}{\sqrt{\sqrt{y^2+x^2}+y}}$$

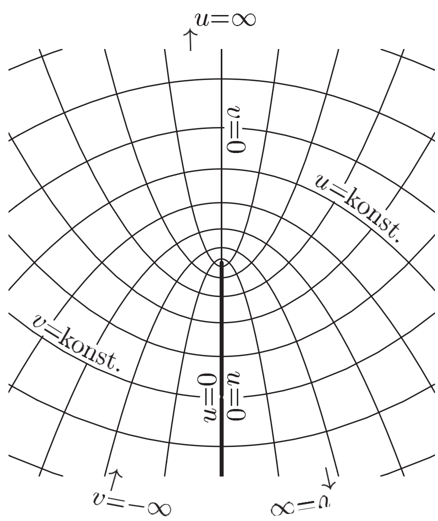
Laméovy koeficienty:

$$h_{(u)} = h_{(v)} = \sqrt{u^2+v^2}$$

Souřadnice jsou ‘konformně kartézské’ – oba Laméovy koeficienty jsou shodné.



varianta 1



varianta 2

Orientace popisek naznačuje směr růstu souřadnic.

Eliptické souřadnice v $\mathbf{E}^2$

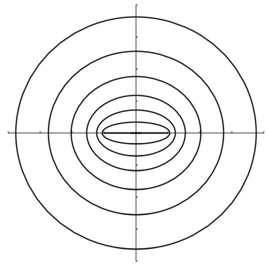
Tato skupina souřadnic zahrnuje souřadné systémy, pro které čáry konstantní ‘radiální’ souřadnice jsou elipsy s ohnisky $x = \pm\ell$, $y = 0$, a čáry konstantní ‘úhlové’ souřadnice jsou hyperboly. Jednotlivé souřadné systémy se liší volbou ‘úhlové’ souřadnice, odlišnou volbou intervalů hodnot jednotlivých souřadnic, případně přeškálováním souřadnic.

‘radiální’ souřadnice:

η, s, c

$s = \ell \sinh\eta$

$c = \ell \cosh\eta$



$\eta, s, c =$ konst.

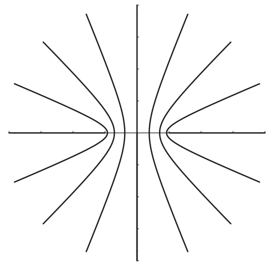
‘úhlové’ souřadnice:

ψ, $\bar\psi$, u, v

$\bar\psi = \dfrac{\pi}{2} - \psi$

$u = \cos\psi = \sin\bar\psi$

$v = \sin\psi = \cos\bar\psi$



$\psi, \bar\psi, u, v =$ konst.

V grafech níže budou singulární body jednotlivých souřadných systémů vyznačeny tlustou čarou. Orientace popisek naznačuje směr růstu souřadnic.
V kontextu eliptických souřadnic zavedeme pomocné funkce r a σ:

$$
\begin{aligned}
r^2 &= x^2 + y^2 \qquad\qquad 2\,(r^2+\ell^2) = (y^2+(x+\ell)^2) + (y^2+(x-\ell)^2)\\
\sigma^2 &= \sqrt{(x^2+y^2)^2 + 2\ell^2(y^2-x^2) + \ell^4} = \sqrt{y^2+(x+\ell)^2}\,\sqrt{y^2+(x-\ell)^2}\\
&= \sqrt{(x^2+y^2-\ell^2)^2 + 4\ell^2y^2} = \sqrt{(x^2+y^2+\ell^2)^2 - 4\ell^2x^2}\\
\sqrt{2}\,\sqrt{\sigma^2+r^2+\ell^2} &= \sqrt{y^2+(x+\ell)^2} + \sqrt{y^2+(x-\ell)^2}
\end{aligned}
$$

Protáhlé eliptické souřadnice

Přívlastek “protáhlé” naznačuje, že takto zavedené souřadnice lze využít ke konstrukci *protáhlých elipsoidálních souřadnic* v $\mathbf{E}^3$ a to rotací okolo osy x. Plochy konstantní ‘radiální’ souřadnice protáhlých elipsoidálních souřadnic tvoří protáhlé rotační elipsoidy.

souřadnice η, $\bar\psi$

hodnoty souřadnic: $\eta \in \mathbb{R}^+$, $\bar\psi \in \big(-\pi, \pi\big)$
pokrytá oblast: x, $y \in \mathbb{R}$
transformační vztahy:

$$
x = \ell \cosh\eta \cos\bar\psi \qquad\qquad y = \ell \sinh\eta \sin\bar\psi
$$

$$
\sinh\eta = \frac{\sqrt{\sigma^2+r^2-\ell^2}}{\sqrt{2}\,\ell} \qquad \sin\bar\psi = \frac{\sqrt{2}\,y}{\sqrt{\sigma^2+r^2-\ell^2}}
$$

$$
\cosh\eta = \frac{\sqrt{\sigma^2+r^2+\ell^2}}{\sqrt{2}\,\ell} \qquad \cos\bar\psi = \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\sigma^2+r^2+\ell^2}}
$$

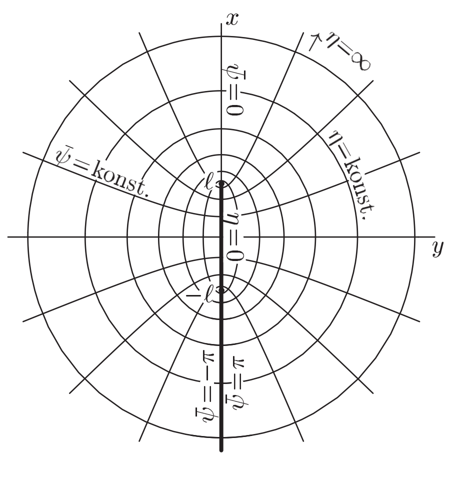
$$
\bar\psi = \frac{\pi}{2} - \psi
$$

Laméovy koeficienty:

$$
h_{(\eta)} = h_{(\bar\psi)} = \sigma
$$

pomocné funkce:

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \ell^2\big(\cosh^2\!\eta - \sin^2\!\bar\psi\big) = \ell^2\big(\sinh^2\!\eta + \cos^2\!\bar\psi\big)\\
\sigma^2 &= \ell^2\big(\cosh^2\!\eta - \cos^2\!\bar\psi\big) = \ell^2\big(\sinh^2\!\eta + \sin^2\!\bar\psi\big)
\end{aligned}
$$



S touto volbou intervalů hodnot je souřadnice η singulární na intervalu $x \in (-\ell, \ell)$ a souřadnice $\bar\psi$ na interval $x \in (-\infty, \ell)$ osy $y = 0$.
Souřadnice η, ψ jsou ‘konformně kartézské’, tj. oba Laméovy koeficienty jsou shodné.
Z konvenčních důvodů jsou v obrázcích pro protáhlé eliptické souřadnice osy x a y vyměněny.

souřadnice c, v

hodnoty souřadnic: $c \in (1, \infty)$, $v \in (-1, 1)$
pokrytá oblast: $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$
transformační vztahy:

$$x = c\,v \qquad\qquad c = \ell \cosh\eta = \frac{\sqrt{\sigma^2 + r^2 + \ell^2}}{\sqrt{2}}$$

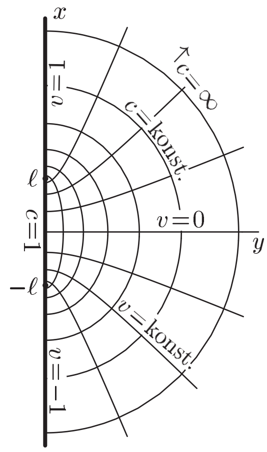
$$y = \sqrt{c^2 - \ell^2}\,\sqrt{1 - v^2} \qquad v = \cos\bar{\psi} = \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\sigma^2 + r^2 + \ell^2}}$$

Laméovy koeficienty:

$$h_{(s)}^2 = \frac{\sigma^2}{c^2 - \ell^2} = \frac{c^2 - \ell^2 v^2}{c^2 - \ell^2} \qquad h_{(v)}^2 = \frac{\sigma^2}{1 - v^2} = \frac{c^2 - \ell^2 v^2}{1 - v^2}$$

pomocné funkce:

$$r^2 = c^2 - \ell^2 + \ell^2 v^2$$
$$\sigma^2 = c^2 - \ell^2 v^2$$



S touto volbou intervalů hodnot pokrývají souřadnice c, v pouze oblast $y > 0$.
Souřadnice c je asymptoticky rovna vzdálenosti od počátku $c \approx r$.

souřadnice c, u

hodnoty souřadnic: $c \in (1, \infty)$, $u \in (-1, 1)$
pokrytá oblast: $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}$
transformační vztahy:

$$x = c\sqrt{1 - u^2} \qquad c = \ell \cosh\eta = \frac{\sqrt{\sigma^2 + r^2 + \ell^2}}{\sqrt{2}}$$

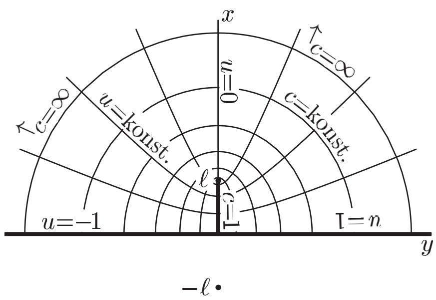
$$y = \sqrt{c^2 - \ell^2}\; u \qquad u = \sin\bar{\psi} = \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\sigma^2 + r^2 + \ell^2}}$$

Laméovy koeficienty:

$$h_{(s)} = \frac{\sigma^2}{c^2 - \ell^2} = 1 + \frac{\ell^2 u^2}{c^2 - \ell^2} \qquad h_{(v)} = \frac{\sigma^2}{1 - u^2} = \frac{c^2}{1 - u^2} - \ell^2$$

pomocné funkce:

$$r^2 = c^2 - \ell^2 u^2$$
$$\sigma^2 = c^2 - \ell^2 + \ell^2 u^2$$



S touto volbou intervalů hodnot pokrývají souřadnice c, u pouze oblast $x > 0$ a jsou singulární na ose $y = 0$ v intervalu $x \in \langle 0, \ell \rangle$.
Souřadnice c je asymptoticky rovna vzdálenosti od počátku $c \approx r$.

Oblé eliptické souřadnice vnitřní

Přívlastek "oblé" naznačuje, že takto zavedené souřadnice lze využít ke konstrukci *oblých elipsoidálních souřadnic* v $\mathbf{E}^3$ a to rotací okolo osy y. Plochy konstantní 'radiální' souřadnice oblých elipsoidálních souřadnic tvoří rotační elipsoidy podobné 'oblázku'.
Přívlastek "vnitřní" indikuje, že souřadnice jsou na ose $y=0$ regulární *uvnitř* intervalu $(-\ell,\ell)$.

souřadnice η, ψ

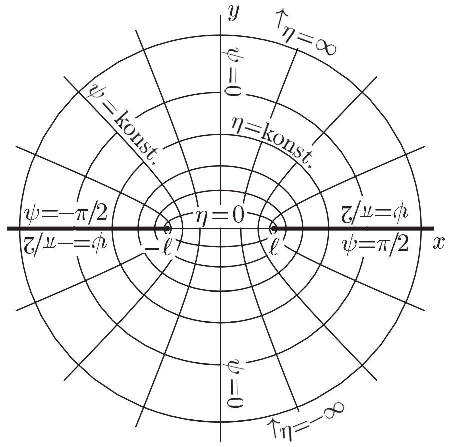
hodnoty souřadnic: $\eta\in\mathbb{R}$, $\psi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
pokrytá oblast: x, $y\in\mathbb{R}$
transformační vztahy:

$$x=\ell\,\cosh\eta\,\sin\psi \qquad y=\ell\,\sinh\eta\,\cos\psi$$

$$\sinh\eta=\frac{\sqrt{2}\,y}{\sqrt{\sigma^2-r^2+\ell^2}} \qquad \sin\psi=\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\sigma^2+r^2+\ell^2}}$$

$$\cosh\eta=\frac{\sqrt{\sigma^2+r^2+\ell^2}}{\sqrt{2}\,\ell} \qquad \cos\psi=\frac{\sqrt{\sigma^2-r^2+\ell^2}}{\sqrt{2}\,\ell}$$

$$\psi=\frac{\pi}{2}-\bar{\psi}$$



S touto volbou intervalů hodnot jsou souřadnice η,ψ singulární na ose $y=0$ mimo interval $x\in(-\ell,\ell)$.
Souřadnice η, ψ jsou 'konformně kartézské', tj. oba Laméovy koeficienty jsou shodné $h_{(\eta)}=h_{(\psi)}$.

Laméovy koeficienty:

$$h_{(\eta)}=h_{(\psi)}=\sigma$$

pomocné funkce:

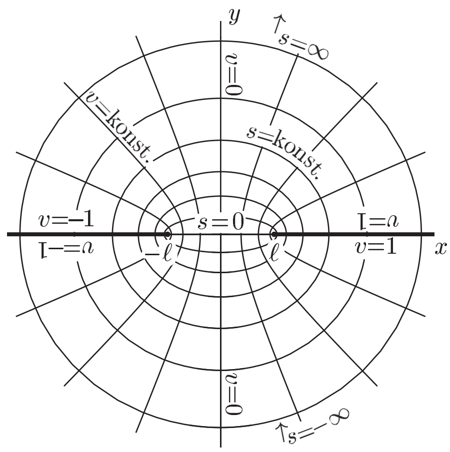
$$r^2=\ell^2\big(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\big)=\ell^2\big(\sinh^2\eta+\sin^2\psi\big)$$
$$\sigma^2=\ell^2\big(\cosh^2\eta-\sin^2\psi\big)=\ell^2\big(\sinh^2\eta+\cos^2\psi\big)$$

souřadnice s, v

hodnoty souřadnic: $s\in\mathbb{R}$, $v\in(-1,1)$
pokrytá oblast: x, $y\in\mathbb{R}$
transformační vztahy:

$$x=\sqrt{s^2+\ell^2}\;v \qquad s=\ell\sinh\eta=\frac{\sqrt{2}\,\ell y}{\sqrt{\sigma^2-r^2+\ell^2}}$$

$$y=s\sqrt{1-v^2} \qquad v=\sin\psi=\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\sigma^2+r^2+\ell^2}}$$



S touto volbou intervalů hodnot jsou souřadnice s,v singulární na ose $y=0$ mimo interval $(-\ell,\ell)$.
Souřadnice s je asymptoticky rovna vzdálenosti od počátku $s\approx r$.

Laméovy koeficienty:

$$h^2_{(s)}=\frac{\sigma^2}{s^2+\ell^2}=1-\frac{\ell^2v^2}{s^2+\ell^2} \qquad h^2_{(v)}=\frac{\sigma^2}{1-v^2}=\ell^2+\frac{s^2}{1-v^2}$$

pomocné funkce:

$$r^2=s^2+\ell^2v^2$$
$$\sigma^2=s^2+\ell^2-\ell^2v^2$$

Oblé eliptické souřadnice vnější

Jedná se v podstatě o tytéž souřadnice jako v předchozím případě, pouze jsou zvoleny jinak intervaly hodnot, které souřadnice nabývají. Alternativní volba hodnot umožňuje zavést souřadnice tak, aby byly na ose $y = 0$ regulární *vně* intervalu $\langle -\ell, \ell \rangle$. Proto jsou i označeny přívlastkem "vnější".

souřadnice η, ψ

hodnoty souřadnic: $\eta \in \mathbb{R}^+$, $\psi \in \big(-\pi, \pi\big)$
pokrytá oblast: x, $y \in \mathbb{R}$
transformační vztahy:

$$x = \ell \cosh\eta \sin\psi \qquad y = \ell \sinh\eta \cos\psi$$

$$\sinh\eta = \frac{\sqrt{\sigma^2 + r^2 - \ell^2}}{\sqrt{2}\,\ell} \qquad \sin\psi = \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\sigma^2 + r^2 + \ell^2}}$$

$$\cosh\eta = \frac{\sqrt{\sigma^2 + r^2 + \ell^2}}{\sqrt{2}\,\ell} \qquad \cos\psi = \frac{\sqrt{2}\,y}{\sqrt{\sigma^2 + r^2 - \ell^2}}$$

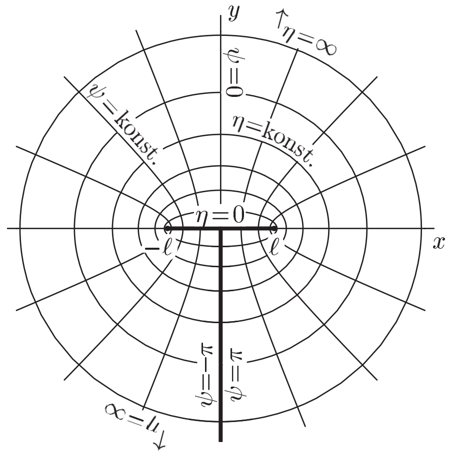
$$\psi = \frac{\pi}{2} - \bar{\psi}$$

Laméovy koeficienty:

$$h_{(\eta)} = h_{(\psi)} = \sigma$$

pomocné funkce:

$$r^2 = \ell^2\big(\cosh^2\eta - \cos^2\psi\big) = \ell^2\big(\sinh^2\eta + \sin^2\psi\big)$$
$$\sigma^2 = \ell^2\big(\cosh^2\eta - \sin^2\psi\big) = \ell^2\big(\sinh^2\eta + \cos^2\psi\big)$$



S touto volbou intervalů hodnot jsou souřadnice η, ψ singulární na ose $y = 0$ v intervalu $x \in (-\ell, \ell)$ a souřadnice ψ navíc na ose $x = 0$ v intervalu $y \in \mathbb{R}^-$.

souřadnice s, u

hodnoty souřadnic: $s \in \mathbb{R}^+$, $u \in (-1, 1)$
pokrytá oblast: $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}$
transformační vztahy:

$$x = \sqrt{s^2 + \ell^2}\,\sqrt{1 - u^2} \qquad s = \ell \sinh\eta = \frac{\sqrt{\sigma^2 + r^2 - \ell^2}}{\sqrt{2}}$$

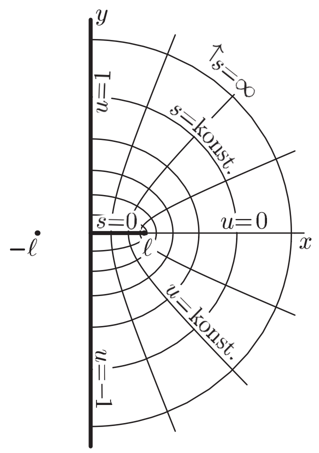
$$y = s\,u \qquad u = \sin\bar{\psi} = \frac{\sqrt{2}\,y}{\sqrt{\sigma^2 + r^2 - \ell^2}}$$

Laméovy koeficienty:

$$h_{(s)}^2 = \frac{\sigma^2}{s^2 + \ell^2} = \frac{s^2 + \ell^2 u^2}{s^2 + \ell^2} \qquad h_{(v)}^2 = \frac{\sigma^2}{1 - u^2} = \frac{s^2 + \ell^2 u^2}{1 - u^2}$$

pomocné funkce:

$$r^2 = s^2 + \ell^2 - \ell^2 u^2$$
$$\sigma^2 = s^2 + \ell^2 u^2$$



S touto volbou intervalů hodnot pokrývají souřadnice s, u pouze oblast $x > 0$ a jsou singulární na ose $y = 0$ v intervalu $x \in \langle 0, \ell \rangle$.
Souřadnice s je asymptoticky rovna vzdálenosti od počátku $s \approx r$.