Ortogonální polynomy (OP)

- zde uvedu jen základní výsledky pro OP jedné proměnné, existuje i zobecnění na polynomy ve více proměnných, viz např.
  Yuan Xu: On Orthogonal Polynomials in Several Variables

Definice: <u>Ortogonální polynomy na intervalu $\langle a,b\rangle$ s vahou $v(x)$</u> jsou posloupností polynomů $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, takovou, že $p_n(x)$ je stupně n a všechny jsou navzájem ortogonální vzhledem k váhové funkci $v(x)$, která je kladná skoro všude a pro kterou existují integrály (momenty) $\int_a^b x^k v(x)\,dx < +\infty$, $k=0,1,2\dots$,

tj. platí
$$(p_n, p_m) \equiv \int_a^b p_n(x)\, p_m(x)\, v(x)\,dx = 0 \quad \text{pro } m \neq n.$$

- že taková posloupnost polynomů existuje, lze ukázat přímou konstrukcí pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace aplikované na polynomy $1, x, x^2, \dots$ se skalárním součinem (p,q)
- díky linearitě je polynom $p_n(x)$ ortogonální k <u>libovolnému</u> polynomu stupně $m<n$

Rekurentní vztah

- polynomy $p_n(x)$ normalizované tak, že koeficient u x^n je 1 splňují rekurentní vztah
$$\boxed{p_{n+1}(x) = (x-\delta_{n+1})\,p_n(x) - \gamma_{n+1}^2\, p_{n-1}(x)} \quad \text{pro } n \geq 0,$$
přičemž položíme $p_0(x)=1$ a $p_{-1}(x)=0$,

kde
$$\delta_{n+1} = \frac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)} \quad \text{a} \quad \gamma_{n+1}^2 = \frac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})} > 0 \quad \text{pro } n>0$$
$$\searrow 0 \quad \text{pro } n=0$$

Dk: $xp_n(x)$ musí být lineární kombinací pouze tří OP:
$$xp_n(x) = a_{n-1}\,p_{n-1}(x) + a_n\,p_n(x) + a_{n+1}\,p_{n+1}(x)$$
neboť $(xp_n, p_m) = (p_n, xp_m) = 0$ pro $m<n-1$

Navíc $a_{n+1}=1$ (aby u x^{n+1} byl koeficient 1) a a_{n-1} a a_n se už jednoduše určí projekcí na p_{n-1} a p_n. Navíc $a_{n+1} = 1 = \frac{(p_{n+1}, xp_n)}{(p_{n+1}, p_{n+1})}$.

- tento rekurentní vztah umožňuje přímo konstruovat ortogonální polynomy na základě tzv. <u>momentů</u>

$$\mu_k = \int_a^b x^k v(x)\,dx \quad , k = 0,1,2\dots$$

např. $p_1(x) = (x-\delta_1)\,p_0(x) = x - \dfrac{(xp_0,p_0)}{(p_0,p_0)} = x - \dfrac{\mu_1}{\mu_0}$

$$p_2(x) = (x-\delta_2)\,p_1(x) - \gamma_2^2\,p_0(x)$$

kde $\delta_2 = \dfrac{(xp_1,p_1)}{(p_1,p_1)} = \dfrac{\mu_3\mu_0^2 - 2\mu_1\mu_2\mu_0 + \mu_1^3}{\mu_0^2\mu_2 - \mu_1^2\mu_0}$

a $\gamma_2^2 = \dfrac{(p_1,p_1)}{(p_0,p_0)} = \dfrac{\mu_2\mu_0 - \mu_1^2}{\mu_0^2}$

atd.

Pozn.:
- odtud je patrná úzká spojitost s momentovou teorií studující tzv. momentové funkcionály $\mathcal{L}[f]$ na prostorech polynomů dané obecně komplexními čísly $\mu_k = \mathcal{L}[x^k]$

<u>Christoffelova - Darbouxova identita</u>

- pokud $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ splňují rekurentní vztah

(*) $$p_{n+1}(x) = (x-\delta_{n+1})\,p_n(x) - \lambda_{n+1}\,p_{n-1}(x) \quad , \text{tj. } \lambda_{n+1} = \gamma_{n+1}^2$$

kde $\lambda_n > 0$, $n \geq 1$, $\lambda_1 = \mu_0$ (což platí pro $v(x)$ kladné skoro všude)

pak $$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)\,p_k(u)}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1}} = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1})^{-1}\,\frac{p_{n+1}(x)\,p_n(u) - p_n(x)\,p_{n+1}(u)}{x-u}$$

Dk: plyne z (*) tak, že odečteme $(*)(x)\cdot p_n(u) - (*)(u)\cdot p_n(x)$ kde $(*)(u)$ znamená vztah (*), kde $x \to u$, čímž dostaneme

$$p_k(x)\,p_k(u) = \frac{p_{k+1}(x)\,p_k(u) - p_k(x)\,p_{k+1}(u)}{x-u} - \lambda_{k+1}\,\frac{p_k(x)\,p_{k-1}(u) - p_{k-1}(x)\,p_k(u)}{x-u}$$

a vynásobením $(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1})^{-1}$ a sečtením těchto rovnic pro $k=0,\dots,n$ dostaneme Christoffelovu - Darbouxovu identitu

- důsledek: v limitě $x \to u$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k^2(x)}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1}} = \frac{p'_{n+1}(x)\,p_n(x) - p'_n(x)\,p_{n+1}(x)}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1}}$$

kde $p'_{n+1}(x) = \lim\limits_{x\to u} \dfrac{p_{n+1}(x) - p_{n+1}(u)}{x-u}$ a pod. pro $p'_n(x)$

odtud vidíme, že pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$ platí

$$\boxed{p'_{n+1}(x)\,p_n(x) - p'_n(x)\,p_{n+1}(x) > 0}$$

Kořeny ortogonálních polynomů

- všechny kořeny x_j, $j=1,\dots,n$ polynomu $p_n(x)$ jsou reálné, jednoduché a leží v intervalu (a,b)

Dk: označme $q(x) = \prod_{j\in L} (x-x_j)$, kde L jsou indexy kořenů $x_j \in (a,b)$, které jsou navzájem různé a liché násobnosti (což znamená, že $p_n(x)$ mění v x_j znaménko)

pak $p_n(x)q(x)$ na $\langle a,b\rangle$ znaménko nemění (nakreslete si příklad :-)

a tedy $(p_n,q) = \int_a^b p_n(x)q(x)v(x)\,dx \neq 0$, z toho vše plyne, že $q(x)$ musí být polynom stupně n (neboť všechny polynomy stupně $m<n$ jsou ortogonální na $p_n(x)$)

a musí tedy mít n kořenů v intervalu (a,b), a tedy i $p_n(x)$

- kořeny $p_n(x)$ leží mezi kořeny $p_{n+1}(x)$

Dk: do vztahu $p'_{n+1}(x)\,p_n(x) - p'_n(x)\,p_{n+1}(x) > 0$ dosaďme kořen $x_k^{(n+1)}$ polynomu $p_{n+1}(x)$, dostaneme

$$p'_{n+1}(x_k^{(n+1)})\,p_n(x_k^{(n+1)}) > 0 \quad \text{pro } k=1,2,\dots,n+1$$

z toho plyne, že $p_n(x)$ musí změnit znaménko mezi 2 kořeny $p_{n+1}(x)$ a tedy má kořen mezi $x_k^{(n+1)}$ a $x_{k+1}^{(n+1)}$

- kořeny $x_k^{(n)}$ lze hledat buď přímo díky předchozímu výsledku např. kombinací metody půlení intervalu a rychlého dokonvergování Newtonovou metodou

nebo pomocí diagonalizace tridiagonální matice

$$J_N = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & & 0 \\ \gamma_2 & \delta_2 & \gamma_3 & & \\ & \gamma_3 & \delta_3 & & \\ & & & \ddots & \gamma_N \\ 0 & & & \gamma_N & \delta_N \end{pmatrix}$$

neboť $\det(\lambda \mathbb{1} - J_N)$ splňuje stejný rekurentní vztah jako $p_n(x)$

$$\det(\lambda - J_N) = \det(\lambda - J_{N-1})(\lambda-\delta_N) - \gamma_N^2 \det(\lambda - J_{N-2})$$

takže kořeny $p_N(x)$ jsou též vlastní čísla J_N

Pozn: existují speciální velmi rychlé algoritmy pro diagonalizaci tridiagonálních matic, takže takto se často kořeny hledají