- <u>lineární vícekrokové metody</u> (linear multistep methods)

  - obecná s-kroková lineární metoda lze psát

$$\sum_{j=0}^{s} \alpha_j v^{n+j} = k \sum_{j=0}^{s} \beta_j f(v^{n+j}, t_{n+j})$$

  - obvykle se volí $\alpha_s = 1$ a musí být $\alpha_0 \neq 0$ nebo $\beta_0 \neq 0$, aby šlo o s-krokovou metodu

  - pokud $\beta_s = 0$ je metoda explicitní
    pro $\beta_s \neq 0$ je implicitní

  - lokální diskretizační chyba je dána Taylorovým rozvojem

$$\sum_{j=0}^{s} \left[\alpha_j u(t+jk) - k \beta_j u'(t+jk) \right] = c_0 u(t) + c_1 k u'(t) + c_2 k^2 u''(t) + \dots$$

  pokud $c_0 = c_1 = \dots c_p = 0$ a $c_{p+1} \neq 0$ máme metodu řádu p

  dostaneme podmínky

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_s = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j = 0 \\ c_1 &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s) - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_s) = \sum_{j=0}^{s} (j\alpha_j - \beta_j) = 0 \end{aligned}\right\} \text{nutné podm. pro } p \geq 1$$

  obecně
$$c_m = \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{j^m}{m!} \alpha_j - \frac{j^{m-1}}{(m-1)!} \beta_j \right) = 0$$

  vidíme, že by mohla být s-kroková metoda s řádem přesnosti $2s$ ($\alpha_s = 1$ a $2s+1$ neznámých), ovšem objeví se problémy se stabilitou (později), Dahlquist ukázal, že stabilní s-krok. lineární metody můžou mít řád přesnosti nejvýše $s+2$

- <u>standardní vícekrokové metody</u>

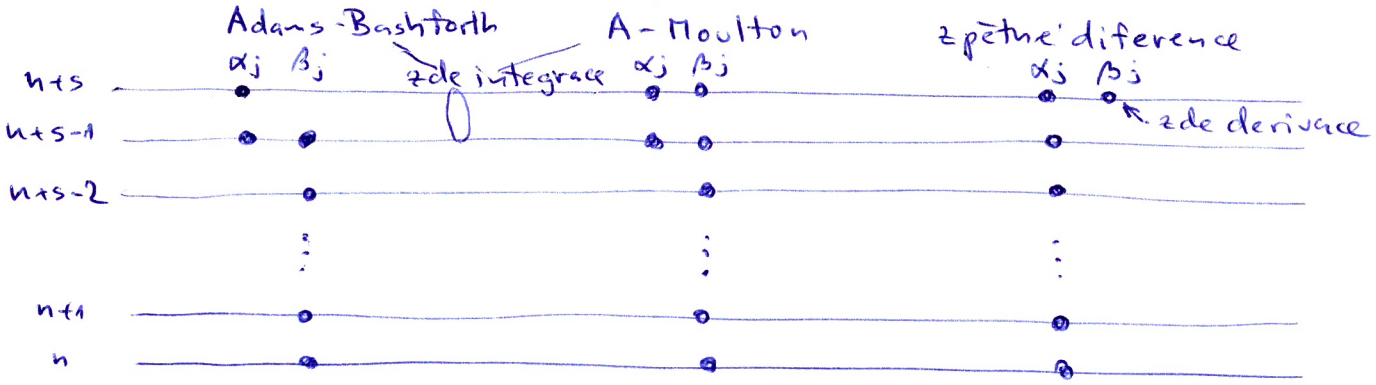
  1) explicitní Adamsovy-Bashforthovy metody
  2) implicitní Adamsovy-Moultonovy metody

     - vycházejí z integrace interpolačního polynomu $q(t)$

$$v^{n+s} - v^{n+s-1} = \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} q(t)\, dt$$

pol. $q(t)$ prochází body $\{t_{n+i}, f_{n+i}\}$, $i = 0, \dots, s-1$ pro A-B
$i = 0, \dots, s$ pro A-M

3) implicitní zpětné diference – aproximace derivace v bodě t_{n+s} pomocí $kD = -\ln(I-\nabla)$



koeficienty α_j a β_j by šly určit i z podmínek na přesnost metod $c_0 = \alpha_0 + \dots + \alpha_s = 0$ atd.

ale elegantněji to lze udělat pomocí Taylorova rozvoje následujícím trikem: použijeme-li operátory posunutí E a derivace D, můžeme pro operátor daný lin. vícekrokovou metodou

$$Lu(t_n) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j u(t_{n+j}) - k \sum_{j=0}^{r} \beta_j u'(t_{n+j})$$

psát $\quad L = \rho(E) - \underbrace{kD\,\sigma(E)}$, kde $\rho(z) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j z^j$ a $\sigma(z) = \sum_{j=0}^{s} \beta_j z^j$

zde lze přehazovat E a D, neboť komutují

a pomocí $E = e^{kD}$ pak

$$L = \rho(e^{kD}) - kD\,\sigma(e^{kD}) = \rho(e^{x}) - x\,\sigma(e^{x}) = c_0 + c_1 x + \dots$$

neboli lin. vícekroková metoda má řád přesnosti p, pokud Taylorův rozvoj funkce $\rho(e^x) - x\,\sigma(e^x)$ začíná x^{p+1}

případně položení $e^x = z$ neboli $x = \ln z$ (nyní pro $x \to 0$ máme $z \to 1$) a vydělení $\sigma(z)$ lze psát (pokud $\sigma(1) \neq 0$)

$$\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} = \ln z + O((z-1)^{p+1}) \quad \text{pro } z \to 1$$

Pozn: podmínky pro přesnost $p \geq 1$ lze psát též jako $\rho(1) = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j = 0$ a $\rho'(1) = \sigma(1)$

Př. Adams-Bashforth: požadavek $\rho(z) = z^s - z^{s-1}$ a tedy $\sigma(z)$ lze určit jako Taylorův rozvoj funkce $\frac{\rho(z)}{\ln z} = \frac{z^s - z^{s-1}}{\ln z}$ v $z \to 1$ do řádu $s-1$

(Adams-Moulton obdobně, jen do řádu s)

- **Stabilita a konvergence**

- řekneme, že určitá metoda je <u>konvergentní</u>, pokud se pro časový krok $k \to 0$ blížíme ke správnému řešení
- a že je <u>stabilní</u>, pokud při dané metodě nedochází ke zvětšování lokálních diskretizačních a zaokrouhlovacích chyb
- přestože metoda může být stabilní a konvergentní pro dostatečně malý časový krok k, nemusí být stabilní pro konečná (i rozumná) k, proto se zavádějí pojmy jako zero-stability (pro $k \to 0$) nebo absolute stability (absolutní stabilita) pro konečné k apod. (některé si definujeme později)

definice: <u>s-kroková metoda je konvergentní</u>, pokud pro lib. ODR $u'(t) = f(u,t)$, kde $f(u,t)$ je spojitá a stejnoměrně Lipschitzovská v u, a pro lib. počáteční podmínky $u(t_0) = u_0$ splňující

$$\lim_{k \to 0} v^i(k) = u_0 \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots, s-1 \qquad (*)$$

platí

$$\lim_{\substack{k \to 0 \\ Nk = T}} v^N = u(T) \quad \text{pro lib. } T > 0,$$

pro které má ODR jednozn. řešení.

Pozn: 1) podmínka $(*)$ je přirozená, máme-li spojité řešení

2) pro pevné T jde $N \to \infty$

3) Existují i metody, které jsou konvergentní jen pro určité ODR či určité poč. podmínky. My se budeme zabývat jen metodami konvergujícími pro lib. počáteční problém.

- **konvergence jednokrokových metod explicitních**
  - ač si ukážeme, že za poměrně obecných podmínek jde o konvergentní metody, nemusí být nutně stabilní pro konečné k! (později oblasti absolutní stability)

1) **explicitní Eulerova metoda je konvergentní**

- uvažujme nejprve lineární problém

$$u'(t) = \lambda u(t) + g(t) \quad , \quad u(t_0) = u_0$$

Eulerova metoda iteruje

$$v^{n+1} = v^n + k\left[\lambda v^n + g(t_n)\right] =$$
$$= (1+k\lambda)v^n + k g(t_n)$$

a z Taylora: $u(t_{n+1}) = (1+k\lambda)u(t_n) + k g(t_n) + \underbrace{\tfrac{1}{2}k^2 u'(t_n) + O(k^3)}_{\text{lokální diskr. chyba } k\tau^n}$

vždy je přítomno pro konzistentní metodu s $p \geq 1$

odečtením dostaneme

$$e^{n+1} = v^{n+1} - u(t_{n+1}) = (1+k\lambda)e^n - k\tau^n$$

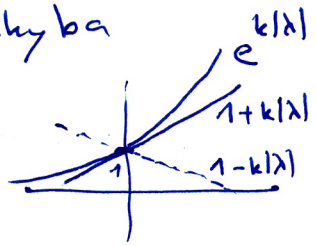
globální chyba v čase t_{n+1}

toto je index!

neboli

$$e^n = (1+k\lambda)^n e^0 - k\sum_{m=1}^{n}(1+k\lambda)^{n-m}\tau^{m-1}$$

počáteční zaokrouhlovací chyba



využijeme-li odhad (pro kladné k a lib. λ)

$$(1+k\lambda)^{n-m} \leq e^{(n-m)k|\lambda|} \leq e^{nk|\lambda|} \leq e^{|\lambda|T}$$

pro $nk \leq T$ pro všechny časy $0 \leq t_n \leq T$,

dostaneme

$$|e^n| \leq e^{|\lambda|T}\left[|e^0| + k\sum_{m=1}^{n}|\tau^{m-1}|\right] \leq e^{|\lambda|T}\left(|e^0| + kn\max_{m=1}^{n}|\tau^{m-1}|\right) \leq$$
$$\leq e^{|\lambda|T}\left(|e^0| + T\underbrace{\|\tau\|_\infty}_{\text{alespoň } O(k)}\right)$$

pro $k \to 0$ jde druhý člen k nule a první záleží na poč. zaokr. chybě a typu úlohy

pokud $e^0 = 0$, máme konvergenci pro $k \to 0$
a jde o metodu řádu 1 (glob. chyba $\mathcal{O}(k)$)

- pro nelineární problém dostaneme obdobně

$$e^{n+1} = e^n + k\left[f(v^n, t_n) - f(u(t_n), t_n)\right] - k\tau^n$$

a díky stejnoměrné Lipschitz. můžeme psát

$$|f(v^n, t_n) - f(u(t_n), t_n)| \le L\,|v^n - u(t_n)| = L\,|e^n|$$

máme tedy nyní odhad

$$|e^{n+1}| \le (1 + kL)\,|e^n| + k\,|\tau^n|$$

neboli $$|e^n| \le (1+kL)^n |e^0| + k \sum_{m=1}^{n} (1+kL)^{n-m} |\tau^{m-1}|$$

a konečně $$|e^n| \le e^{LT}\left(|e^0| + T\underbrace{\|\tau\|_\infty}_{\mathcal{O}(k)}\right)$$

jako v předchozím případě.

2) <u>explicitní Rungeovy-Kuttovy metody jsou konvergentní</u>

obecně pro tyto metody lze psát

$$v^{n+1} = v^n + k\,\Phi(v^n, t_n, k)$$

kde Φ závisí na pravé straně $f(u,t)$ a jako u f předpokládáme, že je spojitá a stejnoměrně Lipschitzovská, ovšem s jinou konstantou L'.

[Př. RK metoda 2. řádu má $\Phi = f(v^n + \frac{1}{2}k f(v^n, t_n), t_n)$
z čehož dostaneme $L' = L + \frac{1}{2}kL^2$ a pro $k \to 0$ je $L' \to L$]

pro chybu nyní dostaneme (obdobně jako u Eulera)

$$e^{n+1} = e^n + k\left[\Phi(v^n, t_n, k) - \Phi(u(t_n), t_n, k)\right] - k\tau^n$$

a tedy $$|e^{n+1}| \le |e^n|(1 + kL') + k\,|\tau^n|$$

a dále už stejně jako výše $\to$ konvergence

Řešení homogenních lineárních diferenčních rovnic

- uvažujme diferenční rovnici k-tého řádu

$$a_k f_{n+k} + \dots + a_1 f_{n+1} + a_0 f_n = 0 \qquad (*)$$

kde a_i jsou reálná čísla ($a_k \neq 0$)

a f_n je zadána pro $n = 0, 1, \dots, k-1$

- obecně (bez počátečních hodnot) existuje k nezávislých řešení (k vektorů $(f_n, \dots, f_{n+k})$ kolmých na $(a_0, \dots, a_k)$)
- bázi tohoto k rozměrného prostoru řešení lze dostat následujícím trikem:
  - s využitím $f_{n+i} = E^i f_n$ přepíšeme $(*)$ jako

$$p(E) f_n = 0$$

kde $p(\lambda) = a_k \lambda^k + \dots + a_1 \lambda + a_0 = a_k (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_m}$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou kořeny polynomu $p(\lambda)$

s násobnostmi $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ splňujícími $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = k$

  - rovnici $(*)$ tedy můžeme psát též jako

$$p(E) f_n = a_k (E - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (E - \lambda_m)^{\alpha_m} f_n = 0$$

a protože $E \lambda^n = \lambda^{n+1} = \lambda \lambda^n$, bude $f_n = \lambda^n$ řešením $(*)$,

pokud je <u>λ kořen charakteristického polynomu $p(\lambda)$</u>

  - pokud je násobnost pro všechny kořeny $\alpha_i = 1$, pak máme k nezávislých řešení
  - pro násobné kořeny obecně platí

$$(E - \lambda)^{\alpha_i} q_{\alpha_i - 1}(n) \lambda^n = 0$$

kde $q_N(n)$ je libovolný polynom N-tého stupně,

neboť $(E - \lambda) q_N(n) \lambda^n = q_N(n+1) \lambda^{n+1} - q_N(n) \lambda^{n+1} = \tilde{q}_{N-1}(n) \lambda^{n+1}$

a tedy postupně snižujeme stupeň q až na nulu pro $(E - \lambda)^{N+1}$.

$$(E - \lambda)^{N+1} q_N(n) \lambda^n = 0$$

- jako α_i nezávislých řešení pro násobný kořen λ_i tedy můžeme vzít

$$\lambda_i^n, n\lambda_i^n, \dots, n^{\alpha_i - 1}\lambda^n$$

- řešení (*) s počátečními podmínkami pro $n = 0, 1, \dots, k-1$ pak dostaneme jako lineární kombinaci takovýchto bázových funkcí a koeficienty tohoto rozkladu do báze určíme řešením soustavy lineárních rovnic daných počátečními hodnotami $f_0, \dots, f_{k-1}$

Př. Fibonacciho posloupnost

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad , \quad f_0 = 0 \quad , \quad f_1 = 1$$

charakt. polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 \quad \text{s kořeny} \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

a tedy řešení bude mít tvar

$$f_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

kde A a B jsou dány rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} f_0 = 0 &= A + B \\ f_1 = 1 &= A\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\,\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = -B = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Řešením je

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

- <u>stabilita a konvergence lineárních vícekrokových metod</u>

  - zde je situace složitější a i konzistentní metoda ($p \geq 1$) nemusí být stabilní, a tedy konvergentní

Př. nestabilní 2-kroková metoda

- explicitní lin. vícekr. metoda s nejvyšším řádem přesnosti $p = 2s - 1 = 3$ je dána

$$v^{n+2} = -4v^{n+1} + 5v^n + k\left[4f(v^{n+1}, t_{n+1}) + 2f(v^n, t_n)\right]$$

(zde máme 4 neznámé: $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ podmínky ($\alpha_2 = 1$):

$$\left.\begin{aligned} 1 + \alpha_1 + \alpha_0 &= 0 \\ 2 + \alpha_1 - \beta_0 - \beta_1 &= 0 \\ 2 + \tfrac{1}{2}\alpha_1 - \beta_1 &= 0 \\ \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{6}\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\beta_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_0 &= -5 \\ \alpha_1 &= 4 \\ \beta_0 &= 2 \\ \beta_1 &= 4 \end{aligned}$$
)

- použijeme-li tuto metodu na rovnici $u'(t) = 0$, $u(0) = 0$ pak pro inicializaci $v^0 = v^1 = 0$ je řešení v pořádku avšak pro $v^0 = 0$, $v^1 = k$ (což splňuje podmínku pro konvergenci) dostaneme $v^n = \frac{k}{6}\left(1 - (-5)^n\right)$

  a tedy nepřesnosti z předchozích kroků jsou násobeny faktorem 5 (exponenciální růst)

[zde je charakt. polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 5$ s kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -5$, tedy $v^n = A1^n + B(-5)^n$ a z poč. podmínek máme rovnice

$$\left.\begin{aligned} v^0 &= 0 = A + B \\ v^1 &= k = A - 5B \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = -B = \frac{k}{6}$$
]

Př.: implicitní 2-kroková metoda řádu 3

$$v^{n+2} - 2v^{n+1} + v^n = \frac{k}{2}\left[f(v^{n+2}, t_{n+2}) - f(v^n, t_n)\right]$$

nyní $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ (opět aplikujeme na $u'(t) = 0$)

a $v^0 = 0 = A$, $v^1 = k = B$ dává řešení $v^n = kn$ (z obecného $v^n = A1^n + Bn1^n$)

opět nestabilní, ale jen polynomiálně

- pokud bychom měli vícenásobný kořen λ_j, pro který by platilo $|\lambda_j| < 1$, pak bychom měli stabilní metodu, neboť pro lib. p platí

$$\lim_{n\to\infty} n^p \lambda_j^n = 0$$

- vidíme, že kořeny charakteristického polynomu

$$\varrho(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j \lambda^j$$

lineární vícekrokové metody musí být v absolutní hodnotě menší než jedna pro vícenásobné kořeny a pro jednonásobné kořeny může být $|\lambda_j| \leq 1$

- takto se definuje stabilita lin. vícekrok. metody (jde otzv. zero-stability), tj.

<u>s-kroková lin. metoda je stabilní,</u> pokud je řešení

$$\varrho(E)\, v^n = 0 \quad \text{omezené pro } n \to \infty$$

neboli pokud $|\lambda_j| \leq 1$ a pro vícenásobné kořeny ϱ navíc $|\lambda_j| < 1$

[Př.: Adamsovy-Bashforthovy i Adamsovy-Moultonovy metody jsou stabilní v tomto smyslu, neboť obecně

$$\varrho(\lambda) = \lambda^s - \lambda^{s-1} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_s = 0$$

tzv. principiální kořen]

- <u>Dahlquistův teorém ekvivalence</u>: Lineární vícekroková metoda pro $u'(t) = f(u(t), t)$ je konvergentní, právě když je konzistentní ($p \geq 1$) a stabilní ve výše uvedeném smyslu.

- stačí tedy zkoumat stabilitu (kořeny $\varrho(\lambda)$), abychom ověřili, že metoda konverguje

- obecně lze též ukázat, že (též Dahlquist) každá stabilní lin. s-kroková metoda může mít řád p nejvýše $s+2$ pro s sudé, $s+1$ pro s liché a s pro explicitní metody

- zpětné diference jsou stabilní pro $1 \leq s \leq 6$