• Absolutní stabilita

- stabilní metoda pro $k \to 0$ může být nestabilní pro konečné k nezávisle na tom, zda jde jedno- nebo vícekrokovou metodu

Př. Uvažujme ODR $u'(t) = \lambda u(t)$ s poč. podm. $u(t_0) = u_0$

řešením je $u(t) = u_0 e^{\lambda(t-t_0)}$

pro Eulerovu metodu máme odhad $e^{n+1} = (1+k\lambda)e^n - k\tau^n$

$\Rightarrow$ k růstu chyby nedochází, pokud $|1+k\lambda| \leq 1$

což platí pro $-2 \leq k\lambda \leq 0$, tj. pouze pro $\lambda \leq 0$

a pro $k \leq \left|\frac{2}{\lambda}\right|$

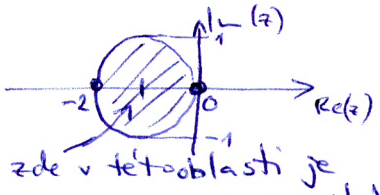
Pozn: Odhad $|e^n| \leq e^{|\lambda|T} T \|\tau\|_\infty = \mathcal{O}(k)$ stále platí pro $k \to 0$

ale výraz $e^{|\lambda|T}T$ může být velký a tedy k musí být velmi malé, aby tento odhad byl rozumný

- pro vyšetřování stability num. řešení ODR se proto zavádí pojem <u>absolutní stabilita</u> a <u>oblast abs. stability</u>, které říkají pro jaké konečné k je metoda stabilní

- tento pojem je založený na vyšetřování stability pro lineární problém $u'(t) = \lambda u(t) + g(t)$, $u(t_0) = u_0$ a obecně hledáme oblast v komplexní rovině, pro kterou je metoda stabilní, s tím, že komplexní proměnnou je součin $z = k\lambda$

Př. pro Eulerovu metodu máme podmínku $|1+k\lambda| = |1+z| \leq 1$ $\Rightarrow$



zde v této oblasti je Eulerova metoda stabilní

- pro obecnou lineární vícekrokovou metodu, kterou pro problém $u'(t) = \lambda u(t)$ můžeme psát ve tvaru

$$\sum_{j=0}^{s} \alpha_j v^{n+j} = k \sum_{j=0}^{s} \beta_j \lambda v^{n+j} \quad \text{neboli} \quad \sum_{j=0}^{s} (\alpha_j - z\beta_j) v^{n+j} = 0,$$

bude podmínkou stability omezenost řešení této lin. diferenční rovnice, neboli

Def: Řekneme, že <u>lineární vícekroková metoda je absolutně stabilní</u> pro konečné $z = k\lambda$, pokud každé řešení dif. rovnice

$$\pi_z(E)\, v^n = (\varrho(E) - z\sigma(E))\, v^n = 0$$

je omezené, neboli pokud pro všechny kořeny tzv. <u>polynomu stability</u> $\pi_z(\xi) = \varrho(\xi) - z\sigma(\xi) = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j \xi^j - z \sum_{j=0}^{s} \beta_j \xi^j$

platí $|\xi_i| \leq 1$, přičemž $|\xi_i| = 1$ může nastat jen pro jednoduché kořeny.

Def: <u>Oblast (absolutní) stability</u> je oblast v komplexní rovině z, kde je lin. vícekrok. metoda absolutně stabilní, tj.

$$S = \{ z \in \mathbb{C};\ \pi_z(\xi) \text{ má kořeny } |\xi_i| \leq 1 \text{ a } |\xi_i| = 1 \text{ platí pro jednoduché kořeny} \}$$

[Pozn: pro $z = 0$ máme podmínku na zero-stabilitu a tedy metoda je stabilní pro $k > 0$, pokud $z = 0 \in S$]

[Př. 1) Eulerova metoda $v^{n+1} - v^n = k\lambda v^n$

$$\left.\begin{aligned} \varrho(\xi) &= \xi - 1 \\ \sigma(\xi) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \pi_z(\xi) = \xi - 1 - z \Rightarrow |\xi| = |1 + z| \leq 1$$

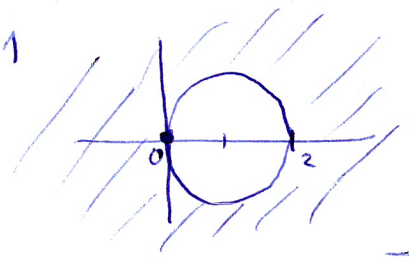
jako výše

2) implicitní Eulerova metoda $v^{n+1} - v^n = k\lambda v^{n+1}$

$$\left.\begin{aligned} \varrho(\xi) &= \xi - 1 \\ \sigma(\xi) &= \xi \end{aligned}\right\} \quad \pi_z(\xi) = \xi - 1 - z \Rightarrow |\xi| = \frac{1}{|1 - z|} \leq 1$$

neboli $|1 - z| \geq 1$

tedy např. pro $\lambda \leq 0$ je metoda stabilní pro libovolné $k > 0$

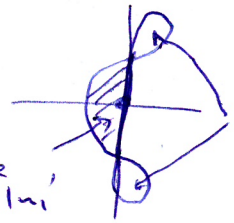


]

- obecně lze pro lin. vícekrokové metody určit hranici oblasti stability S tak, že kořen $|\xi_i| = 1$ musí mít tvar $e^{i\theta}$ a tedy na hranici musí mít alespoň jeden kořen tento tvar z podmínky $\varrho(e^{i\theta}) - z\sigma(e^{i\theta}) = 0$ dostáváme body $z = \dfrac{\varrho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}$ a měníme-li $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$, dostaneme křivku v komplexní rovině, která může být hranicí oblasti stability

- problém ještě je, že vnitřek či vnějšek oblasti ohraničené touto křivkou může, ale nemusí patřit do oblasti stability S dané metody, nutno vyzkoušet alespoň pro jeden bod z dané podoblasti

Př. 1) Adamsova-Bashforthova metoda 4. řádu dá křivku

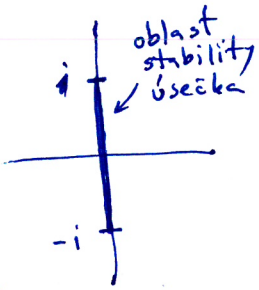


2) midpoint metoda (též leap-frog)

$$v^{n+1} - v^{n-1} = 2\lambda k v^n$$

neboli $\left.\begin{array}{l} \varrho(\xi) = \xi^2 - 1 \\ \sigma(\xi) = 2\xi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_z(\xi) = \xi^2 - 2z\xi - 1 = 0$

kořeny $\xi_{1,2} = \dfrac{2z \pm \sqrt{4z^2+4}}{2} = z \pm \sqrt{z^2+1}$



pro $z = i\alpha$, $|\alpha| < 1$ máme $\xi_{1,2} = i\alpha \pm \sqrt{1-\alpha^2}$

a tedy $|\xi_{1,2}| = 1$, ale různé kořeny

pro $z = \pm i$ budou $\xi_1 = \xi_2 = \pm i$ (dvojnásobné kořeny)

pro lib. jiné z bude jeden z kořenů v abs. hodnotě > 1

- v blízkosti $z = 0$ je obecně vždy jeden kořen

$$\xi_1(z) = e^z + \mathcal{O}(z^{p+1})$$

avšak $|e^z| < 1$ pouze pro $\mathrm{Re}(z) < 0$, a proto lze očekávat, že oblast stability bude nalevo od $z = 0$ (ovšem jsou výjimky jako midpoint metoda výše)

- pro <u>jednokrokové metody</u> typu Runge-Kutta dostaneme pro ODR $u'(t) = \lambda u(t)$ obecně

$$v^{n+1} = R(z)\, v^n, \quad z = k\lambda$$

kde $R(z)$ je obvykle polynom pro explicitní metody a racionální funkce pro implicitní metody

a platí $R(z) = e^z + \mathcal{O}(z^{p+1})$ pro $z \to 0$

(Taylorův rozvoj nebo Padé aproximace e^z)

Př. Rungeova-Kuttova metoda 2. řádu pro $u'(t)=\lambda u(t)$

z obecného předpisu dostaneme

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= v^n \\ y_2 &= v^n + \tfrac{k}{2} f(v^n) \\ v^{n+1} &= v^n + k f(y_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v^{n+1} = v^n + k\lambda\left(v^n + \tfrac{k}{2}\lambda v^n\right) = \underbrace{\left(1+z+\frac{z^2}{2}\right)}_{e^z + O(z^3)} v^n$$

- pokud $|R(z)| \le 1$ je metoda stabilní a oblast abs. stability je ohraničena konturou pro $|R(z)|=1$ (viz ukázky v Mathematice)

- <u>Stabilita pro systém ODR</u>

  - máme-li soustavu m rovnic, obecně nelineárních, můžeme odhadnout, zda bude určitá metoda stabilní pro určitý krok k v určitém čase $\tilde{t}$ pomocí linearizace: zapišeme-li řešení $u(t) = \tilde{u} + w(t)$, kde $\tilde{u} = u(\tilde{t})$ pak pro $w(t)$ dostaneme

$$w'(t) = u'(t) = f(\tilde{u} + w(t), t) = f(\tilde{u}, t) + J(\tilde{u}, \tilde{t})\, w(t) + O(\|w\|^2)$$

kde Jacobián $J_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial u_j}$ je vyčíslený v $\tilde{u}$ a $\tilde{t}$

neboli $w(t)$ splňuje přibližně lineární systém ODR

$$w'(t) = A w(t) + b \qquad (A = J(\tilde{u}, \tilde{t}))$$

a stabilita určité metody bude záviset na A (obdoba λ)

- je-li matice A systému $u'(t) = Au(t)$ diagonalizovatelná, tj. $A = R\Lambda R^{-1}$, kde Λ = diagonální matice s $\underbrace{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}_{\text{vlastní čísla}}$ na diagonále a $R = (r_1 | r_2 | \dots | r_m)$ je matice vlastních vektorů

pak systém $u'(t) = Au(t)$ je ekvivalentní systému

$$R^{-1}u'(t) = (R^{-1}AR)R^{-1}u(t)$$

neboli $v'(t) = \Lambda v(t)$, což je m nezávislých rovnic a pro každou z nich musí platit $k\lambda_i \in S$ dané metody, aby byla stabilní

Př. chemická kinetika pro $A \xrightarrow{\beta_1} B \xrightarrow{\beta_2} C$

kde β_1 a β_2 jsou rychlostní konstanty pro přeměnu A na B, resp. B na C, které se můžou řádově lišit

systém je popsán rovnicemi (u_1 pro množství A, u_2 pro B atd.)

$$u_1'(t) = -\beta_1 u_1(t)$$
$$u_2'(t) = \beta_1 u_1(t) - \beta_2 u_2(t)$$
$$u_3'(t) = \beta_2 u_2(t)$$

a tedy $A = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix}$

s vlastními čísly $\lambda_1 = -\beta_1$, $\lambda_2 = -\beta_2$, $\lambda_3 = 0$

pro $\beta_1 \neq \beta_2$ je řešení

$$u_j(t) = c_{j1} e^{-\beta_1 t} + c_{j2} e^{-\beta_2 t} + c_{j3}$$

s konstantami c_{ji} závislými na počátečních podmínkách

např. Eulerova metoda bude stabilní pokud $k \max(\beta_1, \beta_2) \leq 2$

a podobně pro další metody

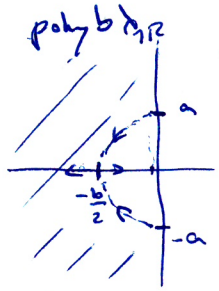
Př. tlumený harmonický oscilátor

$$y''(t) = -a y(t) - \underbrace{b y'(t)}_{\text{tlumení}},$$

zavedeme

$$\left.\begin{aligned} u_1(t) &= y(t) \\ u_2(t) &= y'(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u'(t) = A u(t), \text{ kde } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

nyní $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}\right)$



pro silné tlumení (velké b) vhodný Euler a pod.

ovšem pro slabé tlumení už ne a pro $b = 0$

dostaneme $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-a} = \pm i\sqrt{|a|}$, kdy je vhodná midpoint metoda

- ideální metoda by byla, kdyby měla $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$

což je <u>lichoběžníková</u> (nebo též Crankova–Nicolsonové) metoda

$$v^{n+1} = v^n + \frac{k}{2}\left[f(v^{n+1}, t_{n+1}) + f(v^n, t_n)\right] \quad \text{(implicitní metoda 2. řádu)}$$

pro kterou

$$\left.\begin{aligned} \rho(\xi) &= \xi - 1 \\ \sigma(\xi) &= \frac{\xi + 1}{2} \end{aligned}\right\} \pi_z(\xi) = \xi - 1 - \frac{z}{2}(\xi + 1) = 0 \Rightarrow |\xi| = \left|\frac{2+z}{2-z}\right| \leq 1$$

a rovnost nastává pro $z = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- volba kroku k závisí jednak na tom, jakou požadujeme přesnost (dána globální diskr. chybou) tj. volíme $k \le k_{acc}$, kde k_{acc} odpovídá požadované přesnosti

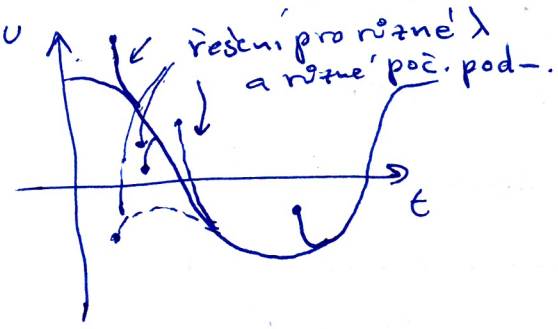
  a jednak na oblasti abs. stability dané metody kdy musíme volit $k \le k_{stab}$, kde k_{stab} je maximální krok, kdy je ještě metoda pro danou úlohu stabilní (typicky pro explicitní metody je k_{stab} konečné, ale pro implicitní metody může být $k_{stab} = \infty$)

- pokud $k_{stab} \ll k_{acc}$ je vhodné zvolit jinou metodu, protože jinak potřebujeme příliš mnoho kroků pro určitou přesnost

• ODR se silným tlumením (stiff ODE)

Př. uvažujme ODR $u'(t) = \lambda(u(t) - \cos t) - \sin t$, $u(0) = 1$

se zadanou poč. podm. je řešení $u(t) = \cos t$ pro lib. λ



pro obecnou poč. podm. $u(t_0) = u_0$ bude řešení

$$u(t) = e^{\lambda(t-t_0)}(u_0 - \cos t_0) + \cos t$$

pro $\lambda \ll 0$ nastává velmi rychlé tlumení

i pro $u(0) = 1$, kdy je řešení nezávislé na λ, rozhoduje o stabilitě součin $k\lambda$! i drobná odchylka způsobí nestabilitu, a chyba se nekontrolovaně zvětšuje, pokud není k dostatečně malé

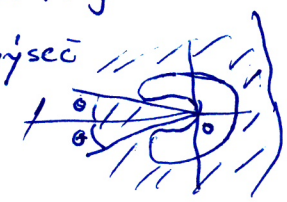
- charakteristiky silného tlumení
  1) velmi různé časové škály (velmi rychlé změny v řešení oproti pomalejším)
  2) nutné použít velmi malé k, zvláště u explicitních metod, k dosažení přesnosti kvůli stabilitě $k < k_{stab} < k_{acc}$
  3) nefunkčnost explicitních metod pro rozumné k, nutno používat např. zpětné diference apod. implicitní metody

- někdy se pro charakterizaci silného tlumení používá poměr $\frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}$, tj. poměr maximálního a minimálního vlastního čísla matice A systému $u'(t) = Au(t)$

ovšem existují případy, kdy je tento poměr malý a přesto jde o problém se silným tlumením (viz např. Higham, Trefethen: Stiffness of ODEs, BIT 33 (1993) 285, kde je ukázán příklad, kdy A není tzv. normální a je nutné zkoumat pseudospektra místo vlastních čísel A)

- na druhou stranu jsou-li λ_i blízko imag. osy a velké, nemusí jít nutně o problém se silným tlumením, spíše jsou řešením rychle oscilující funkce → speciální metody

- protože jde o důležitý problém a jsou pro něj vhodné metody, které mají oblast stability S takovou, že obsahuje celou polorovinu $Re(z) \leq 0$, nebo alespoň co největší její část, zavádí se pojem tzv. A-stability (obsahuje-li celou polorovinu), příp. $A(\theta)$-stabilita (obsahuje-li výseč



a lze např. ukázat, že A-stabilní lin. vícekroková metoda může mít řád nejvýše 2 (viz lichoběžníková metoda)

Př. metody <u>zpětné diference</u> pro systém $u'(t) = Au(t) + g(t)$

s-kroková metoda
$$\sum_{j=0}^{s} \alpha_j v^{n+j} = k\beta_s\left(Av^{n+s} + g(t_{n+s})\right)$$

lze přepsat na ($\alpha_s = 1$)
$$(\mathbb{1} - k\beta_s A)v^{n+s} = k\beta_s g(t_{n+s}) - \sum_{j=0}^{s-1} \alpha_j v^{n+j}$$

což je systém lineárních rovnic pro neznámý vektor v^{n+s}

oblast stability těchto metod obsahuje celou polopřímku $z<0$ avšak pro vyšší řád přesnosti s se stále více zmenšuje úhel θ vyšetřujeme-li $A(\theta)$-stabilitu

- **Adaptivní metody**
  - potřebujeme-li zajistit určitou přesnost řešení, je někdy nezbytné měnit krok podle toho, jak se chyba chová
  - k tomu slouží odhad lokální chyby pomocí současného použití dvou metod s různými řády přesnosti
  - 2 standardní strategie
    1) jednu metodu použijeme s krokem h a $2h$ a rozdíl těchto dvou řešení slouží k odhadu chyby

    Př. RK 4. řádu - spočteme y_1 pomocí kroku $2h$ a y_2 pomocí 2 kroků o délce h

    pak pro přesné řešení

    $$u(x+2h) = y_1 + (2h)^5 C + \mathcal{O}(h^6) \quad \leftarrow \text{krok } 2h$$

    $$u(x+2h) = y_2 + 2h^5 C + \mathcal{O}(h^6) \quad \leftarrow \text{krok } h$$

    z čehož $\Delta \equiv y_2 - y_1$ se bude chovat jako $\mathcal{O}(h^5)$

    a pokud chceme určitou lokální přesnost Δ_0, porovnáme a případně změníme krok pomocí $\tilde{h} = h\left|\frac{\Delta_0}{\Delta}\right|^{0,2}$

    2) byly též objeveny tzv. vnořené (embedded) R-K metody které se liší pouze vektorem b, tj. koeficienty určující v^{n+1} z v^n a z mezikroků, které jsou 4. a 5. řádu, kdy nám stačí 6 vyčíslení $f(u,t)$ na jeden krok (oproti např. 11 u metody RK 4. řádu s kroky h a $2h$) opět rozdíl řešení řádu $\mathcal{O}(h^5)$ a úprava kroku jako výše (viz např. Cashova-Karpova metoda v Mathematice)

  - v současnosti asi nejefektivnější metoda, pokud potřebujeme vysokou přesnost, je <u>Bulirschova-Stoerova metoda</u>

    kombinující midpoint metodu na podintervalech $\frac{h}{n}$, kde n se volí různě, a pak se extrapoluje podobně jako při Richardsonově extrapolaci u derivací či Rombergově integraci

    i zde se využívá toho, že právě pro midpoint metodu se v chybě objevují jen sudé mocniny h^{2k}
  - podrobnosti viz Numerical Recipes, kap. 16 a další knihy o numerickém řešení ODR