

Wood & diagonalizaci matice

$$Ax = \lambda x \iff \det|A - \lambda I| = 0$$

hermit $A^+ = A$ a reál sym $A^T = A \rightarrow$ reálné λ a OG vektor
(stačí aby $\{A, A^+\} = 0$... pak se může reálné λ)

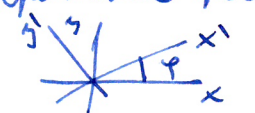
obec matice ne OC a někdy dokonce více než $N \rightarrow$ defektní matice
(solviv Jordan blok)
 $\rightarrow$ levé a pravé vektorů různé, ale OG $x_L^A \cdot x_R^A = \delta_{ij}$

~~$A \rightarrow Z^T A Z = D$~~ .. reál sym. z OC matice $A \rightarrow Z^T A Z = D$
hermit z unit $A \rightarrow Z^+ A Z = D$

Jakobiho transformace metoda

strategie $A \rightarrow A' = P_1^T A P_1 \rightarrow A'' = P_2^T P_1^T A P_1 P_2 \dots$

lede $P_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & c & s \\ & & -s & c \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$
Givensova
rotace

.. odpovídá rotaci o φ

 $c = \cos \varphi$
 $s = \sin \varphi$

znění jen řádky a sloupce s úhly p, q :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1p} & a_{1q} \\ a_{p1} & a_{pp} & a_{pq} & a_{pn} \\ a_{q1} & a_{qp} & a_{qq} & a_{qn} \\ a_{np} & a_{nq} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{rp} = c a_{rp} - s a_{rq} \\ a_{rq} = c a_{rq} + s a_{rp} \end{cases} \quad \begin{cases} r \neq p & r \neq q \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{pp} = c^2 a_{pp} + s^2 a_{qq} - 2sc a_{pq} \\ a_{qq} = c^2 a_{qq} + s^2 a_{pp} + 2sc a_{pq} \\ a_{pq} = (c^2 - s^2) a_{pq} + sc (a_{pp} - a_{qq}) \end{cases}$$

Idea: Valid tak, aby se symleoval $\uparrow$ postupně pro θ elementy
! nejde lineárn. poč. hodnot, ale dá se DK, že konverguje

$t_j \quad \theta = \boxed{\arctan 2\phi} = \frac{c^2 - s^2}{2sc} = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} \quad (\text{pro malé } a_{pq} \rightarrow \infty)$
nerozjím
 $\downarrow$
 $\frac{1-t^2}{2t} \quad (t \equiv s/c) \rightarrow t^2 + 2t + \theta - 1 = 0$

$$t = \frac{-2\theta \pm \sqrt{4\theta^2 + 4}}{2} = -\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 1}$$

$\rightarrow$ menší hodnot $t = \frac{\text{sign } \theta}{|\theta| + \sqrt{\theta^2 + 1}}$

menší $= -\theta + \text{sign } \theta \sqrt{\theta^2 + 1} = \frac{\text{sign } \theta}{|\theta| + \sqrt{\theta^2 + 1}}$

pozn. pokud θ moc velká (ne θ^2 přetáhne) pak použít $t = 1/2\theta$

Polom $c = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$ $s = tc$ $\leftarrow \left(t^2 = \frac{s^2}{c^2} = \frac{1-c^2}{c^2} \rightarrow t^2 c^2 + c^2 = 1 \right)$

Minimalizace rozvahy obzvláště ... přepis * :

$$a'_{pq} = 0$$

$$a'_{pp} = a_{pp} - t a_{pq} \quad \leftarrow \text{pro } r \neq q \text{ aplikací } a_{qq} - a_{pp} = \frac{c^2 - s^2}{2cs} 2a_{pq} = 2t a_{pq}$$

$$a'_{qq} = a_{qq} + t a_{pq} \quad \dots \text{podobně ... srovnání se prázdným}$$

$$a'_{rp} = a_{rp} - s(a_{rq} + t a_{pq}) \quad \text{jako } r_{ij} = r_{ij} + \text{nová hodnota}$$

$$a'_{rq} = a_{rq} + s(a_{rp} - t a_{pq}) \quad \dots \quad t \equiv t_0 \frac{\phi}{2} = \frac{s}{1+c}$$

Konvergence Jakobího metody:

$$S \equiv \sum_{r \neq s} |a_{rs}|^2 \rightarrow S' = S - 2a_{pq}^2 \rightarrow 0$$

(dá se odhadnout ... vybere největší element $t_j > \frac{s}{n^2}$)

$$t_j; \quad S' < (1 - \frac{1}{n^2}) S$$

na k kroků $S^{(k)} < (1 - \frac{1}{n^2})^k S \dots$ každý krok $O(n)$ operací

$\rightarrow$ konverguje jako $O(n^3)$

relace $D \equiv V^T A V \quad V = P_1 \dots P_k$

pro ... na vektoru $V=1$

po jiné relaci $V' = V \cdot P_i \dots$

$$\begin{aligned} \sigma'_{ns} &= \sigma_{ns} \quad s \neq p \quad s \neq q \\ \sigma'_{np} &= c \sigma_{np} - s \sigma_{nq} = \sigma_{np} - s(\sigma_{nq} + t \sigma_{np}) \\ \sigma'_{nq} &= s \sigma_{np} + c \sigma_{nq} = \sigma_{nq} - s(\sigma_{np} - t \sigma_{nq}) \end{aligned}$$

Uzhlédávání max elementu $O(n^2)$ operací, ale dá se snížit
na $O(n)$ když si držíme tabulku největších elementů ve sloupci
(Frajčovi si můžeme udělat kladnou ... $O(\ln(n))$)

NUMREC: cyklický Jakobí:  = one sweep

+ další drobná vylepšení ... typicky $(10-20)n^3 \leftarrow$ složitost.
(vynulování relace pro elem. které už má)

Použití na Hermit matic

o. Jakobi lze udělat přímo: fundamentální je aby:

$$0 = \dot{a}_{pq} = (c^2 - s^2) a_{pq} + sc(a_{pp} - a_{qq})$$

↓

$$0 = \dot{a}_{pq} = c^2 a_{pq} - s^2 a_{pq}^* + sc(a_{pp} - a_{qq})$$

$$0 = \dot{a}_{qp} = c^2 a_{pq}^* - s^2 a_{pq} + sc(a_{pp} - a_{qq})$$

$$t; \quad 0 = \operatorname{Im} a + \underbrace{(c^2 - s^2)}_{\cos 2\phi} \operatorname{Re} a + \underbrace{sc}_{\frac{1}{2} \sin 2\phi} (a_{pp} - a_{qq})$$

opět lze převést na kvadr. m. ...

Jiná finta: NUMREC .. ale stručně řečeno 2 v křehkém i misku

$$(A + iB) \cdot (u + iv) = \lambda(u + iv)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \dots 2m \times 2n \text{ reálná rovnice}$$

$\neq \lambda$ je ta $\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$ reálná vektor .. rozpis

$$\begin{aligned} Au - Bv &= \lambda u \\ Bu - Av &= \lambda v \end{aligned}$$

→ reálný vektor $u + iv$ a $-v + iu = i(u + iv)$

Použití na zřetec. reálné, matic.

$$Ax = \lambda Sx \quad \Leftrightarrow \quad S^{-1}Ax = \lambda_S x$$

po sym matic: ... Löwdin orthogonalizace $S = U^{-1} \lambda_S U$

$$S^{\frac{1}{2}} = U^{-1} \sqrt{\lambda_S} U \quad S^{-\frac{1}{2}} A S^{-\frac{1}{2}} \left(S^{\frac{1}{2}} x \right) = \lambda S^{\frac{1}{2}} x$$

$$FC = SCe$$

$$X^+ S X = 1 \quad (U^+ S U = \lambda)$$

$$\text{Löwdin (symmetric)} \dots X = U S^{-1/2} U^+ \equiv S^{-1/2}$$

$$\text{Canonical} \quad X = U S^{-1/2}$$

Konec V. 3. - ledinový

VI. = cvičení - tomografie

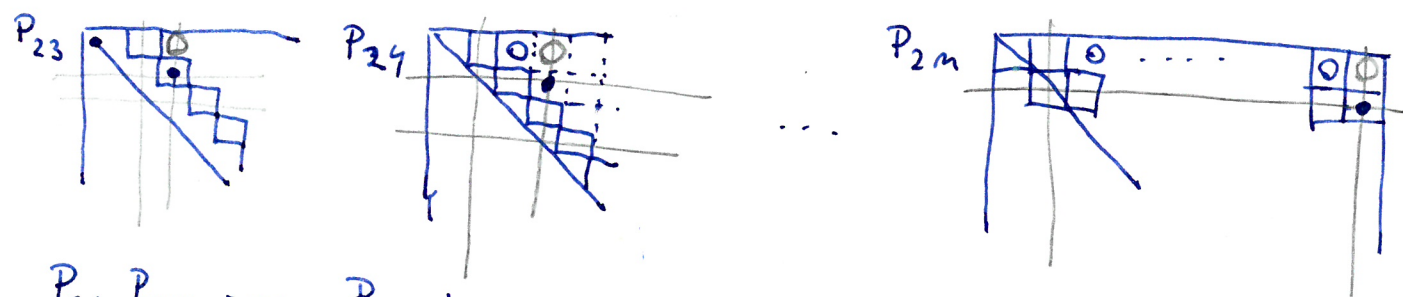
Givensova redukce symmatice na 3-diag.

→ jako Jacobi, ale navíc počítá operací a jiné úkoly na vynulování jiného členu, konkrétně:

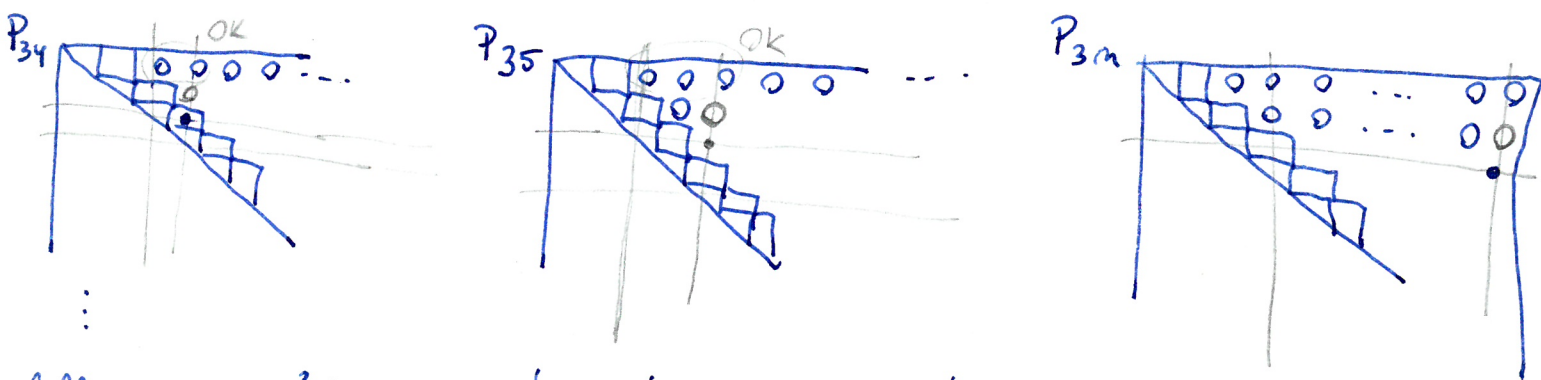
$$P_{jk} \text{ vynuluje } a_{k,j-1} = a_{j-1,k} = c \cdot a_{j-1,k} - s a_{j-1,j} \dots \text{ tj } \tan \phi = \frac{a_{j-1,k}}{a_{j-1,j}}$$

Poslednost operací:

$$P_{23} P_{24} \dots P_{2m} :$$



$$P_{34} P_{35} \dots P_{3m} :$$



Celkem $\sim n^2/2$ operací nebo ... podrobná analýza: $\frac{4}{3}n^3$ operací
(bez $P \dots P$ pro vl. vekt.)

Houssholder stejné stabilní a 2x efektivnější ... ↑ reáln. nepoužití

Houssholderova metoda: $\hookrightarrow \frac{2}{3}n^3$

$$\text{Transf. trojice } P = 1 - 2ww^T \quad + \text{ předp } \langle w | w \rangle = 1$$

$$P^2 = (1 - 2|w \times w|)(1 - 2|w \times w|) = 1 - 4|w \times w| + 4|w \times w| = 1$$

$$\text{tj } P^{-1} = P = P^T \dots \text{ OR matice}$$

$$\text{Postupné transformace: } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \dots Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & L \\ K & A^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times P \\ P \times P A P \end{pmatrix}$$

$$\text{tj, řešení: } P x = k \cdot e_1 \dots \text{ spec volba } |k\rangle = |x\rangle \mp |x| e_1$$

$$\text{tj } P = 1 - 2 \frac{|u \times u|}{\langle u | u \rangle} = 1 - 2 \frac{|u\rangle \langle u|}{2|u|^2 \mp 2|x||x_1|}$$

$$P|x\rangle = |x\rangle - |u\rangle = \pm |x| e_1 \quad |x\rangle = (a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1})$$

$$\text{tj } Q^T A Q = \begin{pmatrix} a & \pm|x| & 0 & 0 \\ \pm|x| & P A^{(n-1)} P \end{pmatrix} \dots Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & P^{(n-2)} \end{pmatrix} \dots \dots \dots n-2 \text{ transformací}$$

Diagonalizace tridiagon. matice

... myslitelné a kořeni char. polynomu ... Sturmian sequence

QR a QL Algoritmus

Všechny lze psát jako

$$A = QR \quad \text{harm' } \blacksquare$$

$$\text{nebo } A_s = Q_s L_s$$

$$A' = RQ = Q^T A Q$$

$$A_{s+1} = L_s Q_s = Q_s^T A_s Q_s$$

→ zjednoduší symetrii a 3-diag (Hessenberg formu)

Věta:

(nedegenerovaná matice A):

$A_s \rightarrow$ dalmí (harmí) Δ funkce s λ na diagonále a rest. pára di' vel.

(degener. matice A):

$A_s \rightarrow$ dalmí (harmí) Δ kromě diag. bloků odpov. stej. vl. č.

Rychlost. konverg: $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right|^s \sim a_{ij}^{(s)}$

uvyčlenění .. shifting:

$$A_s - k_s I = Q_s L_s$$

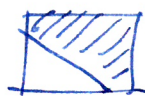
$$A_{s+1} = L_s Q_s + k_s I = Q_s^T A_s Q_s$$

sníma rychl. konverg. na $\frac{\lambda_i - k_s}{\lambda_j - k_s}$

Analogie volby k_s ... vl. č. vedoucí 2x2 matice
v num. rec. dalmí jmenst. .. implicitní shift.

Pozn: nesymetrické matice:

QR (QL) algoritmus ale s Hessenbergou formou



Vylepšování vl. č. + vl. v. .. Inverzní iterace:

tohle ne
(místní řešení)

vyšlehná $(A - \tau I)z = b \Rightarrow z = (A - \tau I)^{-1} b$

+ iterace ... konverguje k vl. č. jako $\left(\frac{|\lambda_j - \tau|}{|\lambda_i - \tau|} \right)^n$

konverguje k $(A - \tau)z = z \quad \text{tj.} \quad Az = (1 + \tau)z$

Lin. algebra - Diagonalizace matic

opakování algebry: (Trefethen)

vl. č. λ ; vl. vektor x : $Ax = \lambda x$

vl. podprostor $\mathbb{F}_\lambda$, spektrum $\Lambda(A)$

diagonalizace:

$$A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$(Ax_1, \dots, Ax_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \Rightarrow A = X \Lambda X^{-1} \quad (\text{stejně jako jinde})$$

pravé vl. v. λ (vl. č.)
↓
podobnostní transform.

$$\text{nebo } \Lambda = X^{-1} A X$$

char. polynom: $p_A(z) \equiv \det(zI - A)$

Věta: λ je vl. č. $\Leftrightarrow p(\lambda) = 0$

→ každý alg. na vl. č. iterativní
jinak by bylo více řešení polynomu

geometrická multiplicita $\equiv$ počet lin. nezávislých vektorů x k danému λ

algebraická $\equiv$ násobnost kořene $p_A(\lambda) = 0$ alg $\geq$ geom. m.

Defektní matice: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}$... obě $p_B = p_A = (z-2)^3$

→ alg. mub. $>$ geom. ... Diagonalizabilita $\Leftrightarrow$ nedefektní

Invarianty: $\text{tr}(A) \equiv \sum A_{ii} = \sum \lambda_i$ $\det(A) = \prod \lambda_i$... koef. $p_A(z)$

Unitárně diagonalizovatelné: $A = Q \Lambda Q^+$; $Q^+ = Q^{-1}$

→ $\Leftrightarrow A$ je normální; tj. $[A, A^+] = 0$

unitární! Jordan pro $X \neq X^+$ (obecně)

Schurova faktorizace: $A = Q T Q^+$ $T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$; $\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ má S.f.

všechny faktorizace: $X^+ A X$; $Q^+ A Q = \Lambda$ nebo T dává λ na diagonále

Věta (Gerschgorin):

$\forall$ vl. č. λ leží v oblasti dané kruhy kolem a_{ii} o poloměru $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| = R_i$

+ pokud se dokážou separovat; stejně i vl. č.

pozn: T je norm. a perturb. leží v $Q \Lambda$

Obecně: levé a pravé vl. v: $Ax = \lambda x \Leftrightarrow x^{-1} A = \lambda x^{-1}$; $\bar{x}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^+ \\ \bar{x}_2^+ \\ \vdots \\ \bar{x}_n^+ \end{pmatrix}$

Isaacson & Keller;

Podminěnost úlohy: .. def $A(\epsilon) \equiv A + \epsilon C$ kde matice $\|C\| = \|A\|$

$$\text{pak } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(\epsilon) - \lambda}{\epsilon} = \frac{y^+ C x}{y^+ x} \equiv \frac{\langle y | C | x \rangle}{\langle y | x \rangle} \quad \dots \text{obecně neovšemné}$$

pro normální matice: $\frac{d\lambda}{d\epsilon} = \frac{\langle x | C | x \rangle}{\langle x | x \rangle} \leq \|C\| = \|A\| = \max \lambda_i$

pozn: nepřímivé probl. malých vl. č. matice s velkým rozptylem vl. č.

A Posteriori odhad chyby: A Hermit. a x, λ : $Ax - \lambda x = \eta$

$$\text{potom } \min_i |\lambda - \lambda_i| \leq \frac{\|\eta\|}{\|x\|}$$

⊗ Companion matrix: $p(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{n-1} t^{n-1} + t^n$ (monic)

$$C(p) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - C(p)| = p(\lambda)$$

Diagonalizace matic, vl. čísla, vl. vektory

Shrnutí algebry: $A \dots$ matice $n \times n$

vl. č. λ a vektor x : $Ax = \lambda x \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$ char. rov.

přímé řešení char. rov. neaplikovatelné, pokud není A spec. tvaru

Samosdr. matice (+ spec. příp. symetrická reál): $A = A^*$ ($A = A^T$)
(Hermit)

Unitární (+ spec. příp. $O(n)$): $A^*A = AA^* = I$ ($= A^TA = AA^T$)

Hermit $\rightarrow$ reál. vl. č., $O(n)$ re. v.

Obecná matice nemusí mít N různých vl. v. ... př: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$ jen $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
(ale má SVD!) $\begin{matrix} \text{levé a pravé vl. v.} \\ x_L = Ax_R \\ Ax_R = \lambda x_R \end{matrix}$ OK

Podmíněnost (viz Isaacson, Keller):

$A(\epsilon) \equiv A + \epsilon C$ kde $\|C\| = \|A\|$ pak

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(\epsilon) - \lambda}{\epsilon} = \frac{y^* C x}{y^* x} \quad \text{kde } y, x \text{ jsou levá a pravá vl. v.}$$

Pro obecnou matici musíme $\frac{y^* C x}{y^* x}$ nabývat lib. velkých hodnot
($y^* x$ nemusí být 0)

Pro Hermit. $y = x$ a ϵ ; $\frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon} = \langle x | C | x \rangle$ (práve z pravek levé a reálné)
(normované x)

$\rightarrow$ je pro levý hledáček reálné vl. č. matice s vl. vl. č.

Odhad chyby ... (A Posteriori)

Věta: A hermit $Ax - \lambda x = y$ $x \neq 0$

$$\text{pak} \quad \min |\lambda - \lambda_i| \leq \frac{\|y\|}{\|x\|}$$

Obecně diagonalizace

$X_R^{-1} A \cdot X_R = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ pokud $\exists N$ vl. v. ... většina matic
až na malou množinu

Podobn. transf: $A \rightarrow Z^{-1} A Z$... stejné vl. v.
reáln. sym: $Z^T A Z$

Metody:

• postupné transf: $A \rightarrow P_1^{-1} A P_1 \rightarrow P_2^{-1} P_1^{-1} A P_1 P_2 \rightarrow \dots$ ~~$P^{-1} A P$~~ D

• faktorizační metody: $A = F_L F_R \dots$ $F_R F_L$ je podobná (prakticky
nejlepší
kombin. obou)
+ účinná ... konverguje $\Delta P = F_L$