Prostory pro řešení PDR pomocí slabých formulací

- když problém řešení PDR naformulujeme slabě (či variačně), lze s výhodou pracovat na větších prostorech než jsme měli dosud tj. prostory spojitých fcí s po částech spojitými derivacemi (je to v těchto případech dokonce přirozenější)
- tyto prostory budou navíc vybaveny vhodným skal. součinem $\Rightarrow$ Hilbertovy prostory

<u>Základní poj-y</u> na vekt. prostorech

- lineární forma $L: V \to \mathbb{R}$: pro $\forall v, w \in V$ a $\beta, \theta \in \mathbb{R}$ platí $L(\beta v + \theta w) = \beta L(v) + \theta L(w)$
- bilineární forma $a: V \times V \to \mathbb{R}$ je lineární v obou argumentech
- symetrická bilin. forma : $a(v,w) = a(w,v)$ pro $\forall v, w \in V$
- skalární součin = symetr. bilin. f., pro kterou $a(v,v) > 0$ pro $\forall v \in V$
- norma $\|\cdot\|_a$ odpovídající skal. součinu $a(\cdot,\cdot)$ je $\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$ pro $\forall v \in V$
- Cauchyho nerovnost pro lib. skal. součin $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$

- vekt. prostor V se skal. součinem a odp. normou $\|\cdot\|$ je <u>Hilbertův prostor</u>, pokud je V úplný, tj. konverguje každá Cauchyho posloupnost v normě $\|\cdot\|$

  tj. pokud pro $v_1, v_2, v_3 \dots$ platí, že pro $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ takové, že $\|v_i - v_j\| < \varepsilon$ pro $i, j > N$

  pak $\exists v \in V$ takové, že $\|v - v_i\| \to 0$ pro $i \to \infty$

<u>Základní Hilbertovy prostory</u> pro eliptické problémy formulované slabě (variačně)

- pro problém na int. $\langle a, b\rangle = I$ mějme prostor kvadraticky integrabilních fcí

$$L_2(I) = \{v,\ v \text{ je definováno na } I \text{ a } \int_I v^2 dx < \infty\}$$

s $(v,w) = \int_I vw\,dx \Rightarrow \|v\|_{L_2(I)} = \left(\int_I v^2 dx\right)^{1/2} = (v,v)^{1/2}$ a vidíme, že díky Cauchyho nerovnosti je (v,w) dobře definovaný.

pro řešení eliptické problému je však přirozenější prostor (neboť potřebujeme (v', w'))

$$H^1(I) = \{v;\ v \text{ a } v' \text{ patří do } L_2(I)\} \text{ se skal. součinem}$$

$$(v,w)_{H^1(I)} = \int_I (vw + v'w')\,dx \quad \text{a normou } \|v\|_{H^1(I)} = \left(\int_I [v^2 + (v')^2]\,dx\right)^{1/2}$$

a případně jeho podprostor $H_0^1(I) = \{v \in H^1(I) : v(a) = v(b) = 0\}$ se stejným skal. součinem.

- původní problém $-u'' = f$ na $I = \langle a, b\rangle$ s okr. podm. $u(a) = u(b) = 0$ lze tedy slabě přeformulovat takto: Nalezněte $u \in H_0^1(I)$ takové, že $(u', v') = (f, v)$ pro $\forall v \in H_0^1(I)$ (S)

  kde sk. součin $(u', v') = \int_I u'v'\,dx$.

– $H_0^1(I)$ je větší než původní V a ve skutečnosti největší prostor, pro který má (S) smysl a navíc pův. pro odhad chyby pomocí $\|v\|_{H^1(I)}$

• obecněji nechť Ω je omezená oblast v R^d, pak

$$L_2(\Omega) = \{v : v \text{ je definováno na } \Omega \text{ a } \int_\Omega v^2 dx < \infty\}$$

$$\cup$$

$$H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega),\ i = 1, \dots d\}$$

se skal. součiny a normami

$$(v,w) = \int_\Omega vw\,dx \quad \Rightarrow \quad \|v\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega v^2 dx\right)^{1/2}$$

$$(v,w)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega [vw + \nabla v \cdot \nabla w]\,dx \quad \Rightarrow \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(v,v)_{H^1(\Omega)}}$$

a dále $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na hranici } \Gamma \text{ oblasti } \Omega\} \subset H^1(\Omega)$ •
se stejným sk. součinem jako $H^1(\Omega)$

Nyní můžeme formulovat slabé a variační úlohu

$$(D) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ na } \Omega \\ u &= 0 \text{ na } \Gamma \end{aligned} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

jako (S) Nalezněte $u \in H_0^1(\Omega)$ takové, že $a(u,v) = (f,v)$ pro $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

nebo ekvivalentně

(V) Nalezněte $u \in H_0^1(\Omega)$ takové, že $F(u) \leq F(v)$ pro $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

kde $F(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - (f,v)$

a $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$ a $(f,v) = \int_\Omega f v\,dx$

(Plyne z Greenovy věty: $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \underbrace{\int_\Gamma v \frac{\partial w}{\partial n}\,ds}_{=0 \text{ pro } v=0 \text{ na } \Gamma} - \int_\Omega v \Delta w\,dx$, kde $\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + \dots \frac{\partial w}{\partial x_d} n_d$ je normálová derivace.)

která plyne z Gaussovy věty $\int_\Omega \operatorname{div} A\,dx = \int_\Gamma A \cdot n\,ds$

dosazením za $A = (v \frac{\partial w}{\partial x_1}, 0, \dots 0)$ $A = (0, v \frac{\partial w}{\partial x_2}, 0 \dots)$ .... a sečtením)

• obecně je mnohem jednodušší dokázat existenci řešení (S) na rozdíl od (D)
a pro složitější (nelineární) problémy se často umí pouze (S)

Pozn. prostory $H^1(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega)$ jsou speciální případy Sobolevových prostorů
$W^{k,p}(\Omega)$ pro $p=2$ (tj. vycházíme z $L_2(\Omega)$, obecně $L_p(\Omega)$ s normou $\|v\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega v^p dx\right)^{1/p}$)
a pro $k=1$, tj. stačí první derivace L_2-integrabilní

obecně pokud se Sobolevův prostor zúplní pomocí slabé derivace, dostaneme Banachův prostor a pro $p=2$ dokonce Hilbertův prostor, neboť jen na $L_2(\Omega)$ lze zavést skal. součin odpovídající normě $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$

Geometrická interpretace FEM

- pro jednoduchost uvažujme problém

$$-\Delta u + u = f \quad \text{na } \Omega \quad \text{a} \quad u = 0 \quad \text{na } \Gamma$$

s odpovídající slabou formulací

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = (f,v) \quad \text{pro } \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

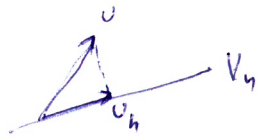
neboli $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx$ tj. $a(u,v)$ je přímo skal. součin na $H_0^1(\Omega)$

- nechť nyní máme $V_h \in H_0^1(\Omega)$ jako dříve a hledáme $u_h \in V_h$:

$$(u_h, v)_{H_0^1(\Omega)} = (f,v) \quad \text{pro } \forall v \in V_h$$

odečtením dostaneme ($v \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$)

$$(u - u_h, v)_{H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \text{pro } \forall v \in V_h$$



tj. chyba je kolmá na $\forall v \in V_h$ vzhledem k $(\cdot,\cdot)_{H_0^1(\Omega)}$

neboli přibližné řešení FEM u_h je projekce u na V_h pomocí $(\cdot,\cdot)_{H_0^1(\Omega)}$

a tedy u_h je nejblíže k u ze všech $v \in V_h$ vzhledem k normě $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{pro } \forall v \in V_h$$

Jiné okrajové podmínky

- pokud máme Dirichletovy okrajové podm. $u = u_0$ na Γ, pak lze ukázat, že slabá formulace zní

Nalezněte $u \in V(u_0)$ takové, že $a(u,v) = (f,v)$ pro $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

kde $V(u_0) = \{v \in H^1(\Omega) : v = u_0 \text{ na } \Gamma\}$

tj. testovací fce lze uvažovat s nulovou okr. podmínkou a okraj. podm. se promítá do volby prostoru, kde hledáme řešení, zde mluvíme o podstatné okr. podmínce

- na druhou stranu máme-li Neumannovu okr. podm. $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ na Γ

dostaneme:

Nalezněte $u \in H^1(\Omega)$ takové, že $a(u,v) = (f,v) + \langle g, v \rangle$ pro $\forall v \in H^1(\Omega)$

kde $\langle g, v \rangle = \int_\Gamma gv \, ds$ (neboť v Greenově větě nyní nezahodíme okraj. člen a použijeme $\frac{\partial u}{\partial n} = g$)

nyní prostor pro řešení je $H^1(\Omega)$ bez jakýchkoli omezení a okr. podmínka je implicitně obsažena ve slabé formulaci, zde mluvíme o přirozené okraj. podmínce

Pozn. při řešení pomocí FEM bude N. okr. podm. splněna přibližně.

Abstraktní formulace FEM pro eliptické rovnice

- umožňuje jednotně studovat mnoho eliptických problémů a pochopit obecné principy FEM

- Nechť V je Hilbertův prostor se skal. součinem $(\cdot,\cdot)_V$ a normou $\|\cdot\|_V = \sqrt{(\cdot,\cdot)_V}$ (V-norma) a nechť $a(\cdot,\cdot)$ je bilineární forma na $V\times V$ a $L(\cdot)$ lineární forma splňující

  (1) $a(\cdot,\cdot)$ je symetrická, tj. $a(v,w)=a(w,v)$

  (2) $a(\cdot,\cdot)$ je spojitá, tj. $\exists\, \gamma>0$:
  $$|a(v,w)| \le \gamma \|v\|_V \|w\|_V \quad \text{pro } \forall v,w\in V$$

  (3) $a(\cdot,\cdot)$ je tzv. V-eliptická, tj. $\exists\, \alpha>0$
  $$a(v,v) \ge \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{pro } \forall v\in V$$

  (4) L je spojitá, tj. $\exists\, \Lambda>0$:
  $$|L(v)| \le \Lambda \|v\|_V \quad \text{pro } \forall v\in V$$

pak lze obecně ukázat, že problémy

(S) Nalezněte $u\in V$ takové, že $a(u,v)=L(v)$ $\forall v\in V$

(V) Nalezněte $u\in V$ takové, že $F(u)\le F(v)$ pro $\forall v\in V$, kde $F(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-L(v)$

jsou ekvivalentní a že existuje jediné řešení $u\in V$ splňující navíc
$$\|u\|_V \le \frac{\Lambda}{\alpha}$$

Dk: ekvivalence zcela obdobně jako v 1D problému, existence z Lax-Milgramovy věty, podmínka dosazením $v=u$ do (S) a jednoznačnost jako v 1D.

Pozn: Pokud $a(\cdot,\cdot)$ není symetrická, má (S) stále smysl a řešení, avšak (V) ne.

Diskretizace a odhad chyby

- nechť $V_n \subset V$ je konečně-rozm. s dimenzí n a bází $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$, tj. lib $v\in V_n$ lze psát jako $v=\sum_{i=1}^n \eta_i\varphi_i$, $\eta_i\in\mathbb{R}$

pak FEM pro (S) formulujeme takto

Nalezněte $u_h\in V_n$ takové, že $a(u_h,v)=L(v)$ pro $\forall v\in V_h$

neboli $a(u_h,\varphi_j)=L(\varphi_j)$ pro $j=1,\dots,n$

a položíme-li $u_h=\sum \xi_i\varphi_i$ dostaneme $A\xi=b$, kde $A_{ij}=a(\varphi_i,\varphi_j)$ a $b_i=L(\varphi_i)$

navíc obecně
$$0\le a(v,v)=a\Big(\sum_{i=1}^n \eta_i\varphi_i, \sum_{j=1}^n \eta_j\varphi_j\Big)=\eta^T A\eta$$
a z V-eliptičnosti plyne, že A je pozitivně definitní symetrická matice a tedy regulární a existuje řešení

- opět jako u spojitého problému platí $\|u_h\|_V \le \frac{\Lambda}{\alpha}$ neboť pro $v = u_h$

máme $\alpha \|u_h\|_V^2 \le a(u_h, u_h) = L(u_h) \le \Lambda \|u_h\|_V$ a dělíme $\|u_h\|_V \neq 0$

Jde o důležitou vlastnost FEM metody a o „teoretický základ" úspěšnosti.

Tato podmínka je „odhadem stability", pro slušné $L(v)$, tj. pravou stranu f, a dostatečně elipt. problém $\alpha > 0$, bude řešení FEM omezené stejně jako skutečné řešení.

- <u>při odhadech chyby FEM</u> se vychází z obecného vztahu

$$(*) \qquad \|u - u_h\|_V \le \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\|_V \quad \text{pro } \forall v \in V_h$$

který říká, že vzhledem k normě ve V je u_h z celého V_h nejblíže k hledanému řešení u. V konkrétní situaci je třeba určit γ a α a dále zvolit vhodné v a odhadnout $\|u - v\|_V$. Většinou se bere interpolované u např. po částech lin. fcí a odhad $\|u - v\|$ z teorie interpolace.

$a(u, w) = L(w) = a(u_h, w)$ pro $\forall w \in V_h$

vztah $(*)$ plyne z toho, že $a(u - u_h, w) = 0$ pro $\forall w \in V_h$

předpoklad o $a(.,.)$

a tedy $\alpha \|u - u_h\|_V^2 \le a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - u_h + w) =$

$= a(u - u_h, u - v) \le \gamma \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V$ a vydělíme $\|u - u_h\|_V$

$u_h - w \in V_h$

- zavedeme-li a-normu (tzv. energetickou) na V pomocí

$$\|v\|_a^2 = a(v, v), \quad v \in V, \quad \text{která je ekvivalentní s } \|\cdot\|_V$$

neboť $\sqrt{\alpha}\, \|v\|_V \le \|v\|_a \le \sqrt{\gamma}\, \|v\|_V$

pak dostaneme $\|u - u_h\|_a \le \|u - v\|_a$ pro $\forall v \in V_h$ a máme opět „projekci" u do V_h na u_h (při skal. součinu $(v, w)_a = a(v, w)$)

<u>Př.</u> ukážeme, že pro náš původní 1D problém je $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ a $\Lambda = \|f\|_{L_2(\Omega)}$ (plyne z Cauchyho nerovnosti) a že chyba $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \le Ch$ pro dostatečně hladké u

- v abstraktní formulaci máme $V = H_0^1(I)$, $I = (a, b)$ $\quad a(v, w) = \int_I v' w' \, dx$, $L(v) = \int_I f v \, dx$

vidíme, že a je sym. bilin. forma a L je lineární

a navíc $|a(v, w)| \le \|v'\|_{L_2(I)} \|w'\|_{L_2(I)} \le \|v\|_{H^1(I)} \|w\|_{H^1(I)}$ a tedy $\gamma = 1$ a $a(.,.)$ je spojitá

- konečně V-eliptricita dává

$$\int_I (v')^2 dx \ge \frac{1}{2} \left(\int_I v^2 dx + \int_I (v')^2 dx \right) \text{ pro } \forall v \in H_0^1(I)$$

což plyne z $\int_I v^2 dx \le \int_I (v')^2 dx$ a α je tedy $\frac{1}{2}$

- k důkazu použijeme vztah $v(x) = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{v(a)}} + \int_a^x v'(y)\,dy$ a dle Cauchyho

$$|v(x)| \le \int_a^b |v'|\,dy \le 1^{1/2}\left(\int_a^b (v')^2\,dy\right)^{1/2}$$ a tedy $|v(x)|^2 \le \int_a^b (v')^2\,dy$

(platí to díky okraj. podmínce $v(a)=0$) a přeintegrujeme

- pro chybu tedy v tomto případě dostaneme

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \le 2\|u-v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{pro } \forall v \in V_h$$

a vezmeme-li si za $v = \underset{=\tilde{u}_h}{\pi_h u}$ = interpolované u pomocí po částech lin. fcemi

pak z chyby interpolace

$$|u'(x) - \tilde{u}_h'(x)| \le h \max_{a\le y\le b} |u''(y)|$$

$$|u(x) - \tilde{u}_h(x)| \le \frac{h^2}{8} \max_{a\le y\le b} |u''(y)|$$

dostáváme $\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \le Ch$, kde C závisí na

což plyne z $\|(u-u_h)'\| \le 2\|(u-\tilde{u}_h)'\| \le Ch$ a integrujeme stím, že $u(a)-u_h(a)=0$, $u(b)-u_h(b)=0$

V 1D se ovšem dá ukázat, že platí $\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \le Ch^2$

neboť vyčíslíme-li pravou stranu přesně, tj. (f,φ_i) nebudeme aproximovat

pak $u_h(x_i) = u(x_i)$ přesně! (souvisí stím, že Greenova funkce je též po částech lineární, viz úloha 1.19. v C. Johnsonové knize, str. 43)

a tedy lze integrovat přímo $|u(x) - \tilde{u}_h(x)| \le Ch^2$