Konformní skalární pole

`NTMF059` – Zápočtový problém 2023

Pod *Weylovou transformací* rozumíme lokální přeškálování metriky kladnou funkcí, tedy nahrazení metriky g_{ab} na varietě M novou metrikou $\tilde{g}_{ab}$ na téže varietě podle vztahu

$$g_{ab} \mapsto \tilde{g}_{ab} = \Omega^2 \, g_{ab} \,, \tag{1}$$

kde Ω je kladná reálná funkce na M a nazývá se *konformní faktor*. Weylova transformace mění délky vektoru, ale zachovává úhly mezi nimi. Někdy je výhodné psát konformní faktor ve tvaru

$$\Omega = e^{\omega} \,, \tag{2}$$

kde ω je libovolná funkce.

S metrikou g_{ab} je kanonicky asociovaná Levi-Civitova kovariantní derivace ∇_a (beztorzní metrická kovariantní derivace). Podobně můžeme s konformně přeškálovanou metrikou $\tilde{g}_{ab}$ asociovat Levi-Civitovu kovariantní derivaci $\tilde{\nabla}_a$. Rozdílový tenzor Q^a_{bc} indukující rozdíl derivací $\tilde{\nabla}_b - \nabla_b$ je dán

$$Q^a_{bc} = \delta^a_b \Upsilon_c + \delta^a_c \Upsilon_b - g_{bc} \Upsilon^a \,. \tag{3}$$

kde

$$\Upsilon_a = d_a \ln \Omega = d_a \omega \,, \tag{4}$$

a isomorfismus mezi vektory a kovektory (snižování a zvyšování indexů) je definován pomocí metriky g_{ab}.

1. Ukažte, že Ricciho tenzor se transformuje vztahem

   $$\widetilde{\mathrm{Ric}}_{ab} = \mathrm{Ric}_{ab} - (n-2)\nabla_a \nabla_b \, \omega - g_{ab} \, \Box \omega + (n-2)\Upsilon_a \Upsilon_b - (n-2) \, g_{ab} \, \Upsilon_c \Upsilon^c \,, \tag{5}$$

   kde $\Box \equiv \nabla^c \nabla_c$ je d'Alembertův operátor.

2. Jak se transformuje skalární křivost R?

Rovnice pole libovolného pole X se nazývá *konformně invariantní*, pokud existuje přeškálování $\tilde{X} = \Omega^s X$ takové, že přeškálované pole $\tilde{X}$ vyhovuje formálně stejné rovnici, jenom odvozené z přeškálované metriky $\tilde{g}$. Exponent s, pokud existuje, se nazývá *konformní váha*.

3. Uvažujte vakuové Maxwellovy rovnice v prostoročase obecné dimenze n,

$$\nabla_{[a}F_{bc]} = 0\,, \quad \nabla^b F_{ab} = 0\,, \tag{6}$$

a konformně přeškálované pole $\tilde{F}_{ab} = \Omega^s\, F_{ab}$, a požadujte konformní invarianci Maxwellových rovnic, tedy

$$\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{F}_{bc]} = 0\,, \quad \tilde{\nabla}^b \tilde{F}_{ab} = 0\,. \tag{7}$$

Jaká musí být dimenze prostoru a konformní váha, aby bylo možné konformní invarianci splnit?

4. Nalezněte transformaci d'Alembertova operátoru působícího na skalární pole ϕ konformní váhy s, tj. naleznete $\tilde{\Box}\tilde{\phi}$. Ověrte, že d'Alembertova rovnice $\Box\phi = 0$ obecně není pro $n > 2$ konformně invariantní.

5. Ukažte, že kombinace

$$\left[\Box - \frac{n-2}{4(n-1)}\, R\right] \phi = 0 \tag{8}$$

pro vhodnou volbu konformní váhy s skalárního pole ϕ invariantní je. Pro jaké s?

Řešení rovnice (8) se říká *konformní skalární pole*. Tenzor energie hybnosti tohoto pole v případě $n = 4$ je

$$T_{ab} = \frac{2}{3}\,(\nabla_a\phi)(\nabla_b\phi) - \frac{1}{6}g_{ab}\,(\nabla_c\phi)(\nabla^c\phi) + \frac{1}{6}\big(\mathrm{Ric}_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab}\big)\phi^2 - \frac{1}{3}\phi\,\nabla_a\nabla_b\phi + \frac{1}{3}g_{ab}\,\phi\Box\phi\,. \tag{9}$$

6. Určete stopu T_{ab} za předpokladu, že polní rovnice (8) je splněna.

7. Opět za předpokladu, že polní rovnice (8) je splněna, ukažte, že divergence tenzoru je nulová, $\nabla_a T^{ab} = 0$.