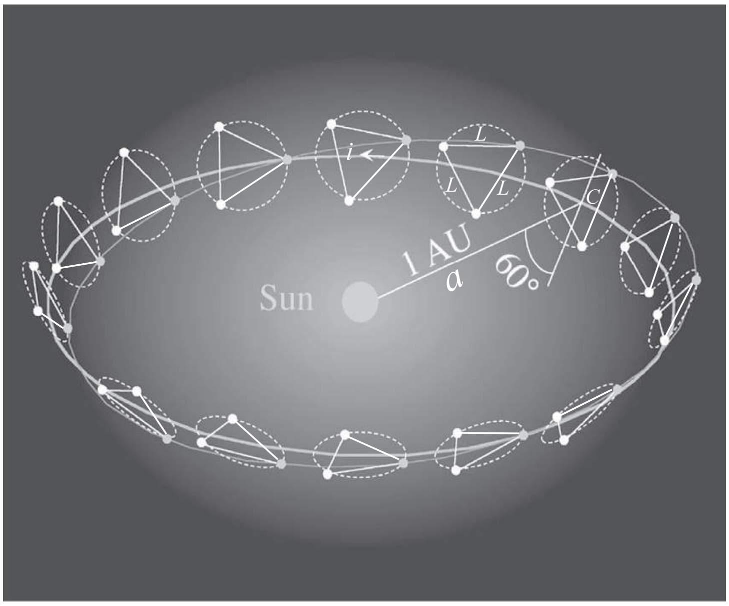
# Příklad z teoretické mechaniky č. 1 (2024)

Albert Einstein v listopadu 1915 zformuloval obecnou teorii relativity. Jako jeden z pozoruhodných důsledků své teorie o pár měsíců později předpověděl existenci gravitačních vln, slabých poruch křivosti prostoročasu šířících se rychlostí světla. Ty byly přímým způsobem prokázány až o sto let později, když dva vysoce citlivé interferometry LIGO v USA detekovaly signál GW150914 ze srážky dvou velkých černých děr. Za to byla v roce 2017 udělena Nobelova cena. Počet zaznamenaných gravitačních vln od té doby překročil dvě stovky.

Evropská kosmická agentura ESA už několik desetiletí připravuje ambiciózní projekt obřího detektoru gravitačních vln ve vesmíru s názvem LISA (Laser Interferometer Space Antena), viz `www.lisamission.org`. Jeho realizace byla schválena 25. ledna 2024. Bude se skládat ze tří družic jejichž relativní vzdálenosti budou přesně proměřovány laserovou interferometrií. Družice budou obíhat kolem Slunce po třech *samostatných* eliptických dráhách, ale se *stejnými* velikostmi poloos $a = 1\,\mathrm{AU} = 150 \cdot 10^6$ km, excentricit $\varepsilon$ a sklony $i$ rovin oběhu k ekliptice:




Průsečíky těchto tří rovin oběhu s rovinou ekliptiky budou vůči sobě pootočené o 120° a počáteční polohy voleny tak, že družice se při svém oběhu budou nacházet ve vrcholech pomyslného *rovnostranného trojúhelníka* se stranami $L = 2,5 \cdot 10^6$ km. Rovina trojúhelníka bude stále svírat 60° s rovinou ekliptiky, bude se však stáčet a trojúhelník družic v ní bude rotovat s periodou rovnou době oběhu $T$.

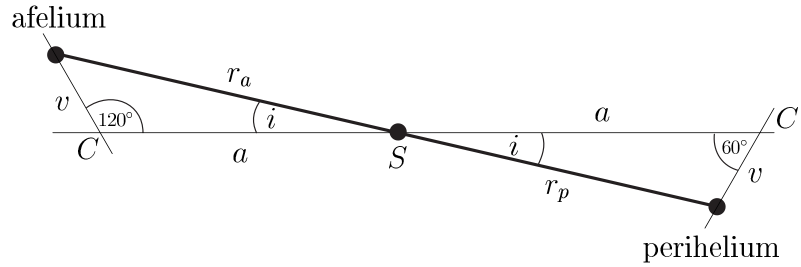
Smyslem úlohy je promyslet popsanou geometrii drah, stanovit hodnoty $\varepsilon$ a $i$, a spočítat že s velmi malou relativní chybou bude vzdálenost $L$ družic konstantní (právě tato vlastnost rozšiřuje frekvenční rozsah i citlivost detektoru, neboť omezuje vliv Dopplerova efektu).

Díky symetrii problému se stačí omezit na vyšetřování pohybu jediné družice vůči referenčnímu středu $C$ trojúhelníka, který se pohybuje rovnoměrně v rovině ekliptiky po kružnici, jejíž poloměr je (přibližně) roven $a$.

1. Ukažte, že z podmínky, že vzdálenost družice od středu $C$ by měla být (přibližně) rovna $v = L/\sqrt{3}$ v periheliu i afeliu, lze určit hodnoty parametrů

$$\varepsilon = \frac{v}{2a} \qquad \text{a} \qquad \sin i = \sqrt{3}\,\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,.$$

Nápověda: Použijte kosinovou a sinovou větu, vztah $r = a(1-\varepsilon^2)/(1+\varepsilon\cos\varphi)$, kde $\varphi = 0$ odpovídá periheliu a $\varphi = \pi$ afeliu, a obrázek znázorňující pohled z roviny ekliptiky (předpokládáme, že v periheliu a afeliu je družice v největší vzdálenosti od této roviny):




2. Nyní ověřte, že vzdálenost družice od středu $C$ zůstává s velkou přesností stejná po celou dobu oběhu (tedy nejen v periheliu a afeliu). K tomu můžete použít například numerickou simulaci trajektorií na počítači. Pokud se rozhodnete pro analytický výpočet, vyjádřete kartézskou vzdálenost $d$ družice od $C$ pomocí vztahů

$$\begin{aligned} &x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = 0\,, \\ &x_c = a\cos M\cos i\,, \quad y_c = a\sin M\,, \quad z_c = a\cos M\sin i\,, \end{aligned}$$

kde $M = 2\pi t/T$, takže $d^2 = a^2 + r^2 - 2ar(\cos i\cos\varphi\cos M + \sin\varphi\sin M)$. Vyjádřete úhly $\varphi$ a $M$ pomocí tzv. excentrické anomálie $E$ a vztahů známých z nebeské mechaniky:

$$\begin{aligned} &\tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\frac{E}{2}\,, \\ &M = E - \varepsilon\sin E \qquad \text{(tzv. Keplerova rovnice)}\,, \end{aligned}$$

takže

$$\cos\varphi = \frac{\cos E - \varepsilon}{1-\varepsilon\cos E}\,, \quad \sin\varphi = \sqrt{1-\varepsilon^2}\frac{\sin E}{1-\varepsilon\cos E}\,, \quad r = a(1-\varepsilon\cos E)\,.$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{a^2} = 1 + (1-\varepsilon\cos E)^2 - 2\Big[&\sqrt{1-3\,\varepsilon^2+\mathcal{O}(\varepsilon^3)}\,(\cos E-\varepsilon)\cos(E-\varepsilon\sin E) \\ &+\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin E\,\sin(E-\varepsilon\sin E)\Big]\,. \end{aligned}$$

Rozvinutím této funkce do Taylorovy řady v proměnné $\varepsilon$ ukažte že

$$\frac{d^2}{a^2} = 4\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\,,$$

vyjádřete $d$ pomocí $L$ a výsledek diskutujte.

J. Podolský, ÚTF, 7. 10. 2024