Příklad z teoretické mechaniky č. 3 (2024)

Uvažujme Keplerovu úlohu popsanou Lagrangeovou funkcí

$$L = \frac{1}{2} m\,\mathbf{v}^2 + \frac{GMm}{|\mathbf{r}|}\,, \tag{1}$$

kde M je hmotnost Slunce, m je hmotnost planety, $\mathbf{r}$ je její poloha a $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ je její rychlost. Cílem úkolu je analyzovat vlastnosti takzvaného *Laplaceova–Rungeho–Lenzova vektoru* $\mathbf{A}$, který je definován výrazem

$$\mathbf{A} = \frac{1}{m^2}\,(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - GM\,\frac{\mathbf{r}}{r}\,, \tag{2}$$

kde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ je hybnost planety, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ je moment hybnosti planety a $r = |\mathbf{r}|$. Protože nepůsobí žádný moment sil, je $\mathbf{L}$ integrálem pohybu (zachovává se) neboli $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = 0$.

1. Přímým výpočtem časové derivace výrazu (2) s použitím vztahů $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} = -GMm\,\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$ a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\dfrac{1}{r}\Big) = -\dfrac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{r^3}$ dokažte, že $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = 0$, tedy že Laplaceův–Rungeho–Lenzův vektor $\mathbf{A}$ je také integrál pohybu.

2. Nyní dokažte totéž v Hamiltonově formalismu. Nejprve ukažte, že v kartézských souřadnicích $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ má Hamiltonova funkce H příslušející (1) a Laplaceův–Rungeho–Lenzův vektor $\mathbf{A}$ definovaný v (2) tvar

$$H = \frac{1}{2m}\,p_k p_k - GMm\,\frac{1}{r}\,, \tag{3}$$

$$A_i = \frac{1}{m^2}\,(x_i p_j p_j - p_i x_j p_j) - GM\,\frac{x_i}{r}\,, \tag{4}$$

   kde $r \equiv (x_k x_k)^{1/2}$ a používáme Einsteinovu sumační konvenci. Kanonicky sdružené proměnné fázového prostoru jsou zde x_i, p_i. Spočtením Poissonovy závorky funkcí (3) a (4) pak ukažte, že

$$\{A_i, H\} = 0\,, \tag{5}$$

   což potvrzuje, že všechny tři složky A_i Laplaceova–Rungeho–Lenzova vektoru jsou integrály pohybu.

   Návod: Pomocí linearity, Leibnizova pravidla $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$ a antisymetrie redukujte výpočet na fundamentální Poissonovy závorky $\{x_i, x_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$ a použijte také identity $\{x_i, r^{-1}\} = 0$ a $\{p_i, r^{-1}\} = r^{-3}x_i$.

3. Nakonec ukažte, že $\mathbf{A}\cdot\mathbf{L} = 0$ a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = \frac{l^2}{m^2} - GMr$, kde $l = |\mathbf{L}|$. První rovnice geometricky znamená, že vektor $\mathbf{A}$ je kolmý na $\mathbf{L}$, tedy *leží v rovině oběhu planety*, zatímco druhou rovnici lze přepsat do tvaru $r = \dfrac{l^2}{GMm^2(1 + \frac{A}{GM}\cos\varphi)}$, kde φ je úhel mezi vektorem $\mathbf{A}$ a okamžitou polohou planety $\mathbf{r}$ (platí $\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = Ar\cos\varphi$). Srovnáním s rovnicí elipsy $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$ vidíme, že *velikost vektoru* $\mathbf{A}$ *určuje excentricitu orbity*, neboť $A = |\mathbf{A}| = GM\varepsilon$. Vidíme též, že konstantní Laplaceův–Rungeho–Lenzův vektor *míří od Slunce podél hlavní poloosy směrem do perihelia* dráhy planety. Existence integrálu pohybu $\mathbf{A}$ tedy zaručuje, že v Keplerově úloze nedochází ke stáčení perihelia.

pokračování na druhé straně

4. *Dobrovolná část pro nadšence:*
   Výraz (4) lze ekvivalentně přepsat do tvaru

$$A_i = \frac{1}{m^2}\, a_i + \frac{1}{m}\, H x_i\,, \qquad \text{kde} \qquad a_i = \tfrac{1}{2} x_i p_j p_j - p_i x_j p_j\,. \tag{6}$$

   Užitím (6) a známých Poissonových závorek

$$\{x_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}\, x_k\,, \qquad \{p_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}\, p_k\,, \qquad \{H, L_j\} = 0 \tag{7}$$

   pro složky $L_j = \varepsilon_{jkl}\, x_k\, p_l$ momentu hybnosti $\mathbf{L}$ ukažte, že platí relace

$$\{A_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}\, A_k\,. \tag{8}$$

5. *Dobrovolná část pro velké nadšence:*
   Pomocí identity $\{a_i, a_j\} = 0$ lze dokázat relaci

$$\{A_i, A_j\} = -\frac{2}{m^3}\, H\, \varepsilon_{ijk}\, L_k\,. \tag{9}$$

J. Podolský, ÚTF, 2. 12. 2024