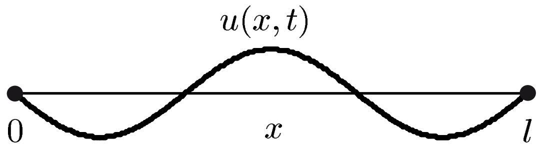
Příklad z teoretické mechaniky č. 4 (2024)

Cílem úlohy je seznámit se s *Bernoulliovou–Fourierovou metodou* řešení rovnice struny.

1. Kmity struny (jednorozměrného spojitého útvaru konstantní lineární hustoty ρ, v němž působí vnitřní síly σ) jsou dány řešením *rovnice struny*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,, \tag{1}$$

kde funkce $u(x,t)$ popisuje malou příčnou výchylku v místě x v čase t, přičemž $c = \sqrt{\sigma/\rho}$ je rychlost šíření vlny. Projděte si fyzikální odvození této rovnice ve studijním textu.



2. Uvažujme, že *oba konce struny* klidové délky l *jsou upevněny* na ose x v bodech 0 a l, tedy že máme *okrajové podmínky*

$$u(0,t) = 0\,, \tag{2}$$
$$u(l,t) = 0\,. \tag{3}$$

Řešení (1) se hledá v *separovaném tvaru* $u(x,t) = X(x)\,T(t)$. Dosazením dostaneme

$$c^2\,\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot T(t)}{T(t)} = -\omega^2\,, \tag{4}$$

kde čárka značí derivaci podle x a tečka derivaci podle t. Vztah vyjadřuje rovnost mezi dvěma funkcemi *různých proměnných*, jež má být splněna pro *všechny* hodnoty x a t. To nastává jen tehdy, rovnají-li se *obě strany* téže *separační konstantě* $-\omega^2$. Vztah (4) proto představuje dvě *obyčejné* lineární diferenciální rovnice pro $X(x)$ a $T(t)$.

Ukažte, že pro nulové nebo ryze imaginární ω příslušné funkce $X(x)$ řešící (4) nesplňují obě okrajové podmínky (2), (3), zatímco pro *reálné* ω má každé řešení tvar

$$X(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right),$$

kde

$$C_1 = 0\,, \qquad \omega_n = n\pi\frac{c}{l}\,, \quad \text{kde} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

3. Obecné řešení rovnice (4) pro $T(t)$ nyní je $T(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$, a protože rovnice (1) je lineární, řeší ji i každá *superpozice* partikulárních řešení pro všechna n. Řešení rovnice struny tedy má tvar

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)\left[a_n \cos\left(n\pi\frac{c\,t}{l}\right) + b_n \sin\left(n\pi\frac{c\,t}{l}\right)\right], \tag{5}$$

kde a_n, b_n jsou konstanty. Ty lze určit z *počátečních podmínek*, tedy ze zadaných hodnot funkce $u(x,0)$ a z její časové derivace $\dot u(x,0)$ v počátečním čase $t = 0$:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \qquad \text{počáteční výchylka struny}\,, \\ \dot u(x,0) &= v_0(x) \qquad \text{rychlost vypuštění struny}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Ukažte, že tedy musíme splnit podmínky

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) = u_0(x) \ , \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, n\pi\frac{c}{l} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) = v_0(x)\,. \tag{8}$$

4. Z *teorie Fourierových řad* plyne, že koeficienty a_n, b_n v (5) jsou explicitně určeny vztahy

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x\,, \tag{9}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l v_0(x)\sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x\,. \tag{10}$$

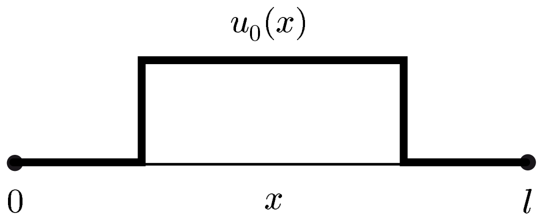
Dokažte to. K tomu nejprve spočítejte užitečný integrál pro $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^l \sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right)\sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\,\delta_{mn}\,, \tag{11}$$

a to pomocí identity $\sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right)\sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{2}\cos\left((m-n)\pi\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{2}\cos\left((m+n)\pi\frac{x}{l}\right)$. Výrazy (9), (10) pro a_n, b_n pak získáte tím, že řady (7), (8) vynásobíte funkcí $\sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right)$, vyintegrujete přes x a použijete vztah (11). Platí, že systém funkcí $\left\{\sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)\right\}$ tvoří *úplný ortogonální systém funkcí* s pevnými konci (2), (3) na intervalu $(0, l)$.

5. Tuto metodu řešení vlnové rovnice demonstrujte na konkrétním příkladu, kdy počáteční podmínky mají tvar

$$u_0(x) = 1 \qquad \text{pro} \quad x \in \left[\frac{1}{4}\,l, \frac{3}{4}\,l\right], \quad \text{všude jinde je} \ \ u_0(x) = 0\,,$$
$$v_0(x) = 0\,.$$



Spočítejte všechny integrály (9), (10) a explicitně napište příslušnou kompletní řadu (5).

6. Nakonec odvoďte vztahy analogické (5), (7), (8), (11), (9), (10) pro případ, kdy namísto (2), (3) jsou naopak *oba konce struny zcela volné*, což odpovídá okrajovým podmínkám

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0\,, \tag{12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0\,. \tag{13}$$

Dejte pozor na to, že v tomto případě je nutné uvažovat i základní mód $n = 0$.

J.Podolský, ÚTF, 16. 12. 2024