

Domácí úkol 1a: Škálování, konformní symetrie a skalární pole

Relativistická fyzika II

Odevzdání: 30. března 2026

V přednášce jsme uvedli Lagrangeovský formalismus pro teorii gravitace. Je Lagrangeovský formalismus pro „zbytek“ fyziky na křivém pozadí triviální a jednoznačný díky principu minimální vazby? V této úloze se podíváme na tuto otázku pro nehmotné skalární pole ϕ . Naším cílem bude prozkoumat, jak se pole chová při změně škálování, a to jak globálně v plochém prostoročase, tak lokálně (tzv. konformní transformace) v zakřiveném prostoročase.

1. Akce pro volné nehmotné skalární pole v plochém Minkowského časoprostoru je

$$I = -\frac{1}{2} \int \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \sqrt{-\eta} d^4x. \quad (1)$$

- (a) Pomocí rozvoje obecného řešení pro ϕ do rovinných vln (řešení pomocí Fourierovy transformace) ukažte, že stopa tenzoru energie hybnosti nehmotného pole je nulová.
 - (b) Uvažujme globální přeškálování všech fyzikálních vzdáleností $ds^2 \rightarrow \lambda^2 ds^2$ a tudíž $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \lambda^2 \eta_{\mu\nu}$. Pro teorii, která nezávisí na žádné charakteristické škále, požadujeme, aby byla akce vůči této transformaci invariantní. Předpokládejme, že se skalární pole transformuje jako $\phi(x) \rightarrow \tilde{\phi}(x) = \lambda^\Delta \phi(x)$. Určete škálovací dimenzi Δ skalárního pole tak, aby platilo $I[\phi] = I[\tilde{\phi}]$.
2. Nyní přejdeme do zakřiveného prostoročasu pomocí principu minimální vazby ($\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$, $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$). Výsledná akce pak je

$$I_{\min} = -\frac{1}{2} \int g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \sqrt{-g} d^4x. \quad (2)$$

- (a) Diskutujte, proč pro pole konečné vlnové délky křivost prostoročasu způsobí, že odpovídající tenzor energie hybnosti bude mít obecně nenulovou stopu.
- (b) Uvažte lokální zobecnění škálovacích transformací, tzv. konformní transformaci metriky: $\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x)$ a $\tilde{\phi}(x) = \Omega^\Delta(x) \phi(x)$, kde $\Omega(x)$ je nějaká kladná hladká funkce. Vyjádřete akci $I_{\min}[\tilde{g}, \tilde{\phi}]$ pomocí původních veličin $g_{\mu\nu}$, ϕ a funkce $\Omega(x)$. Ukažte, že tato akce **není** konformně invariantní (tj. objeví se dodatečné členy obsahující derivace Ω).

3. Abychom získali konformně invariantní teorii, musíme opustit striktně minimální vazbu a přidat člen, který způsobí interakce skaláru přímo s křivostí. V nejnižším řádu v křivosti se na skalární pole může vázat pouze Ricciho skalár. Zároveň chceme psát akci kvadratickou v polních veličinách, a proto zkusíme napsat akci

$$I_{\text{conf}} = \int \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\nu} \phi - \frac{1}{2} \xi R \phi^2 \right) \sqrt{-g} d^4x, \quad (3)$$

kde R je Ricciho skalár a ξ je bezrozměrná konstanta. Pomocí přímého výpočtu¹ lze ukázat, že Ricciho skalár se transformuje jako $R \rightarrow \Omega^{-2} R - 6\Omega^{-3} \square \Omega$. Najděte hodnotu ξ , pro které se se dodatečné členy z transformace kinetického členu a Ricciho skaláru přesně vyruší a akce I_{conf} se stane konformně invariantní.

4. Tensor energie a hybnosti je definován z variace akce podle metriky jako

$$\delta I = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (4)$$

Uvažujte infinitezimální konformní transformaci $\Omega(x) = 1 + \epsilon \omega(x)$, kde $\omega(x)$ je libovolná funkce a $\epsilon \ll 1$. Z toho plyne variace metriky $\delta g_{\mu\nu} = 2\epsilon \omega(x) g_{\mu\nu}$. Pouze na základě předpokladu, že je akce vůči této transformaci invariantní (tj. $\delta I = 0$ pro libovolné $\omega(x)$), dokažte, že stopa tenzoru energie a hybnosti musí být nulová ($T^{\mu}_{\mu} = 0$). Obojí I_{conf} i I_{min} mají tu samou podobu v plochém prostoročase. Která z verzí akce je tedy podle vás tím „správným“ zobecněním akce nehmotného skalárního pole a proč?

5. *Bonus*: Spočítejte tenzor energie spočítaný z variace I_{conf} a ukažte jeho nulovou stopu za použití rovnic pohybu. (Tip: Jediný složitější člen je $\propto \phi^2 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$. Pomocí výrazu pro $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ z přednášky a skrze dvě per partes integrace jej už relativně přímočaře vyjádříte pomocí $\delta g_{\mu\nu}$.)

¹Výpočet je dlouhý a nemusíte jej provádět. Pokud vaše srdce touží po tom jej provést, řadu kroků zjednoduší použití parametrizace $\Omega = e^{\sigma(x)}$.