Domácí úkol 1b: Odvození akce pro linearizovanou gravitaci

Relativistická fyzika II

Odevzdání: 30. března 2026

Na přednáškách jsme probírali lagrangeovský formalismus pro gravitaci. V této úloze odvodíte akci pro linearizovanou gravitaci. Uvažujte Einstein-Hilbertovu (EH) akci

$$I_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{16\pi} \int_\Omega R\sqrt{-g} d^4x \,, \tag{1}$$

kde Ω je prostoročasový 4-objem. V této úloze budete rozvíjet akci pro metrickou perturbaci $h_{\mu\nu}$ definovanou relací

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \,, \tag{2}$$

kde ϵ představuje parametr, který nám pomáhá organizovat rozvoj. Vzhledem k tomu, že nás polní rovnice zajímají do řádu $\mathcal{O}(\epsilon)$, nabízelo by se akci rozvinout pouze do lineárního řádu. Obecně ale platí, že akce pro lineární rovnice musí být kvadratické ve svých proměnných, lineární členy vedou na triviální dynamiku (vazby) nebo musí být vyintegrovatelné na okrajové členy.

Akci rozvinutou do druhého řádu v ϵ lze vypočítat „hrubou silou" pomocí rozvojů všech polních veličin, ale existuje zkratka, protože už známe cílové polní rovnice. Definujme Lichnerowiczův operátor $\mathcal{E}$ jako operátor generující polní rovnice linearizované gravitace:

$$(\mathcal{E}h)_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(2h^{\rho}{}_{(\nu,\mu)\rho} - \Box h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\Box h - \eta_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta}\right) = \partial_\epsilon G_{\mu\nu}[\eta + \epsilon h] \,, \tag{3}$$

kde h je stopa vůči Minkowského metrice a veškeré zvedání a snižování indexů je také ve smyslu Minkowského metriky.

(a) Pomocí opakovaných integrací per partes ukažte, že pro jakákoliv dvě symetrická tenzorová pole $A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ hladce mizící na okraji nějakého objemu Ω platí

$$\int_\Omega A^{\mu\nu} (\mathcal{E}B)_{\mu\nu} d^4x = \int_\Omega (\mathcal{E}A)^{\mu\nu} B_{\mu\nu} d^4x \,. \tag{4}$$

Tj. $\mathcal{E}$ je samosdružený.

(b) Z předchozího bodu ukažte, že lze jako akci generující správné polní rovnice zvolit

$$\int_\Omega (\mathcal{E}h)^{\mu\nu} h_{\mu\nu} d^4x\,. \tag{5}$$

Variací akce a požadavkem, že by měla vést na tu samou variaci jako EH akce odvozená v přednášce určete též konstantu proporcionality mezi touto akcí a EH akcí rozvinutou do druhého řádu v ϵ (modulo povrchové členy).

(c) Ukažte, že divergence Lichnerowiczova operátoru působícího na libovolné symetrické tenzorové pole je nula. To použijte k důkazu, že je akce invariantní vůči malým souřadnicovým transformacím $x^{'\mu} = x^\mu + \epsilon\xi^\mu$ mizícím na okraji Ω pomocí obvyklé relace $\delta_\xi h_{\mu\nu} = 2\xi_{(\mu,\nu)}$.

(d) *Bonus:* Pomocí integrace per partes eliminujte druhé derivace v akci a odvoďte takzvanou Pauli-Fierzovu akci

$$I_{\mathrm{PF}} = -\frac{1}{64\pi}\int_\Omega \left(\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} - \partial_\lambda h \partial^\lambda h + 2\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu \partial^\mu h - 2\partial_\lambda h_\mu{}^\lambda \partial_\nu h^{\nu\mu}\right) d^4x\,. \tag{6}$$