

# Domácí úkol 2a: Harmonický poloměr ve statických a sféricky symetrických prostoročasech

## Relativistická fyzika II

Odevzdání: 15. května 2026

Na přednáškách jsme probírali koncept harmonických souřadnic a jejich význam pro počáteční problém v relativitě. V této úloze se pokusíte takoveto souřadnice najít v obecném statickém, sféricky symetrickém prostoročase a pak výrazy specializujete na Schwarzschildovu metriku. Cílem je pochopit strategie, jak se harmonické souřadnice hledají, a že jsou typicky odlišné od běžně používaných souřadnic.

Obecnou statickou, sféricky symetrickou metriku lze lokálně vyjádřit v souřadnicích Schwarzschildova typu jako

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

kde  $f(r), h(r)$  jsou nějaké obecné funkce. V případě Schwarzschildova prostoročasu  $f = 1/h = 1 - 2M/r$ .

- (a) Zkuste najít harmonický poloměr  $R_H(r)$  takový, aby platilo  $\square R_H = 0$ . (S funkcí  $R_H(r)$  nakládejte jako se skalárním polem.) Ukažte, že pro Schwarzschildovu metriku je takové pole vždy buď triviální nebo singulární na horizontu. Diskutujte též harmoničnost ostatních souřadnic.
- (b) Vyzkoušejte proto jiný Ansatz: “sférické souřadnice odvozené z harmonických souřadnic Kartézského typu”. Tj. uvažujte

$$T_H = t, X_H = r_H(r) \sin\theta \cos\phi, Y_H = r_H(r) \sin\theta \sin\phi, Z_H = r_H(r) \cos\theta. \quad (2)$$

Ukažte, za jakých podmínek jsou souřadnice harmonické, tj. kdy splňují  $\square\phi = 0$  pro  $\phi = T_H, X_H, Y_H, Z_H$ .

- (c) Rovnice vyřešte v případě Schwarzschildova prostoročasu tak, aby souřadnice měly pro  $r \rightarrow \infty$  význam běžných Minkowského souřadnic.
- (d) Vyjádřete Schwarzschildovu metriku v souřadnicích  $t, r_H, \theta, \phi$ . Porovnejte první tři členy rozvoje metriky v  $1/r_H$  s těmi v  $1/r$ .
- (e) Bonus: Vyzkoušejte najít řešení i v jiných statických, sféricky symetrických prostoročasech, třeba i numericky.