

# Domácí úkol 2b: Harmonické souřadnice v Kerrově prostorověčase

## Relativistická fyzika II

Odevzdání: 15. května 2026

Na přednáškách jsme probírali koncept harmonických souřadnic a jejich význam pro počáteční problém v relativitě. V této úloze odvodíte jeden z možných souborů harmonických souřadnic v Kerrově prostorověčase. Cílem je pochopit, že v netriviálních prostorověčasech hledání harmonických souřadnic není jednoznačné, a že výsledky jsou typicky odlišné od běžně používaných souřadnic.

- (a) Uvažujte Kerrovu metriku s černou dírou o hmotnosti  $M$  a spinu  $a$  v Boyer-Lindquistových souřadnicích  $t, r, \theta, \phi$ . Vyjádřete vlnový operátor v těchto souřadnicích pro obecnou skalární funkci.

- (b) Ukažte, že následující funkce by mohla být použita v Kerrově prostorověčase jako “harmonický čas”

$$T_{\text{H}} = t + \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r - r_+}{r - r_-} \right|, \quad (1)$$

kde  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ . Ukažte také, že i původní souřadnice  $t$  je harmonická.

- (c) Uvažte následující Ansatz pro “kvazi-Kartézské” harmonické souřadnice

$$X_{\text{H}} = \sqrt{(r - M)^2 + a^2} \sin \theta \cos(\phi - \Phi(r)), \quad (2)$$

$$Y_{\text{H}} = \sqrt{(r - M)^2 + a^2} \sin \theta \sin(\phi - \Phi(r)), \quad (3)$$

$$Z_{\text{H}} = (r - M) \cos \theta. \quad (4)$$

Ukažte, že  $Z_{\text{H}}$  je harmonická souřadnice. Vyjádřete podmínku na  $\Phi(r)$ , aby i  $X_{\text{H}}, Y_{\text{H}}$  byly harmonické souřadnice.

- (d) Zkontrolujte, že následující funkce řeší rovnice pro  $\Phi(r)$  z předchozího bodu:

$$\Phi(r) = \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{r - M + a\Omega(r)}{a - (r - M)\Omega(r)} \right), \quad (5)$$

$$\Omega(r) \equiv \tan \left[ \frac{-a}{2\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left( \frac{r - r_+}{r - r_-} \right) \right]. \quad (6)$$