Úvodní kurz matematických metod fyziky

pro nastupující posluchače 1. ročníku MFF UK

24.–25. 9. 2020

Geometrie

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Skalární součin $\vec{a}, \vec{b} \quad \to \quad \big(\vec{a}, \vec{b}\big) \;\equiv\; \vec{a}\cdot\vec{b} \;\in\; \mathbb{R}$

$\big(\vec{a},\vec{b}\big) \;=\; \big(\vec{b},\vec{a}\big)$		symetrie
$\big(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\big) = \big(\vec{a},\vec{c}\big) + \big(\vec{b},\vec{c}\big)$	$\big(r\vec{a},\vec{b}\big) = r\big(\vec{a},\vec{b}\big)$	linearita
$\big(\vec{a},\vec{a}\big) > 0 \quad \text{pro } \vec{a} \neq \vec{0}$		positivní definitnost
$\forall \vec{x} \quad \big(\vec{a},\vec{x}\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0$		nedegenerovanost
$\lvert\vec{a}\rvert \;=\; \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$		délka vektoru
$\big(\vec{a},\vec{b}\big) \;=\; \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\,\cos\sphericalangle[\vec{a},\vec{b}]$		úhel mezi vektory

Skalární součin $\vec{a}, \vec{b} \quad \rightarrow \quad \left(\vec{a}, \vec{b}\right) \;\equiv\; \vec{a}\cdot\vec{b} \;\in\; \mathbb{R}$

$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \;=\; \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$	symetrie
$\left(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right) \qquad \left(r\vec{a}, \vec{b}\right) = r\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$	linearita
$\left(\vec{a}, \vec{a}\right) > 0 \quad \text{pro } \vec{a} \neq \vec{0}$	positivní definitnost
$\forall\vec{x} \quad \left(\vec{a}, \vec{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0$	nedegenerovanost
$\lvert\vec{a}\rvert \;=\; \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$	délka vektoru
$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \;=\; \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\,\cos\sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}]$	úhel mezi vektory

Vektorový součin $\vec{a}, \vec{b} \quad \rightarrow \quad \vec{v} \;=\; \vec{a}\times\vec{b}$

$\vec{v}\perp\vec{a} \qquad \vec{v}\perp\vec{b} \qquad \lvert\vec{v}\rvert \;=\; \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin\sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}]$	definiční vlastnosti
$\vec{a}\times\vec{b} \;=\; -\vec{b}\times\vec{a}$	antisymetrie
$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c} \qquad \left(r\vec{a}\right)\times\vec{b} = r\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$	linearita
$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} \;\neq\; \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$	není asociativní
$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} \;=\; \vec{b}\,\left(\vec{a}, \vec{c}\right) - \vec{c}\,\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$	“bac − cab”

Skalární součin $\vec{a}, \vec{b} \quad \to \quad (\vec{a}, \vec{b}) \;\equiv\; \vec{a} \cdot \vec{b} \;\in\; \mathbb{R}$

$(\vec{a}, \vec{b}) \;=\; (\vec{b}, \vec{a})$ symetrie

$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) \qquad (r\vec{a}, \vec{b}) = r(\vec{a}, \vec{b})$ linearita

$(\vec{a}, \vec{a}) > 0 \quad \text{pro } \vec{a} \neq \vec{0}$ positivní definitnost

$\forall \vec{x} \quad (\vec{a}, \vec{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0$ nedegenerovanost

$|\vec{a}| \;=\; \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$ délka vektoru

$(\vec{a}, \vec{b}) \;=\; |\vec{a}||\vec{b}| \cos\sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}]$ úhel mezi vektory

Vektorový součin $\vec{a}, \vec{b} \quad \to \quad \vec{v} \;=\; \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{v} \perp \vec{a} \qquad \vec{v} \perp \vec{b} \qquad |\vec{v}| \;=\; |\vec{a}||\vec{b}| \sin\sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}]$ definiční vlastnosti

$\vec{a} \times \vec{b} \;=\; -\vec{b} \times \vec{a}$ antisymetrie

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \qquad (r\vec{a}) \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b})$ linearita

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \;\neq\; \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ není asociativní

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \;=\; \vec{b}\,(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}, \vec{b})$ “bac – cab”

Smíšený součin $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \;=\; (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \;=\; (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$

$=$ orientovaný objem rovnoběžnostěnu napnutého na $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Souřadnice vektorů

každý vektor lze vyjádřit vůči bázi

báze vektorů $=$ lineárně nezávislé vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$\vec{a} = a^1\,\vec{e}_1 + a^2\,\vec{e}_2 + a^3\,\vec{e}_3$$

$$\text{vektor } \vec{a} \quad \leftrightarrow \quad \text{souřadnice } \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

ortonormální báze

$$|\vec{e}_j| \;=\; 1 \qquad\qquad \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) \;=\; 0 \qquad \text{pro } i \neq j$$

Souřadnice vektorů

každý vektor lze vyjádřit vůči bázi

báze vektorů $=$ lineárně nezávislé vektory $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$

$$\vec{a} = a^1\,\vec{e}_1 + a^2\,\vec{e}_2 + a^3\,\vec{e}_3$$

$$\text{vektor } \vec{a} \quad \leftrightarrow \quad \text{souřadnice } \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

ortonormální báze

$$|\vec{e}_j| \;=\; 1 \qquad\qquad \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) \;=\; 0 \qquad \text{pro } i \neq j$$

Skalární součin v ortonormálních souřadnicích

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \;\equiv\; a^1\,b^1 + a^2\,b^2 + a^3\,b^3$$

Vektorový součin v ortonormálních souřadnicích

$$\vec{v} \;=\; \vec{a} \times \vec{b} \qquad\qquad \begin{aligned} v^1 &= a^2\,b^3 - a^3\,b^2 \\ v^2 &= a^3\,b^1 - a^1\,b^3 \\ v^3 &= a^1\,b^2 - a^2\,b^1 \end{aligned}$$

Smíšený součin ortonormálních souřadnicích

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \;=\; a^1\,b^2\,c^3 + a^2\,b^3\,c^1 + a^3\,b^1\,c^2 - a^1\,b^3\,c^2 - a^3\,b^2\,c^1 - a^2\,b^1\,c^3 \;=\; \det \begin{bmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$$

Souřadnice bodů

Lineární souřadnice

vztažná soustava: počátek P a souřadnicové osy dané lineárně nezávislými směry $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$A = P + \vec{r} = P + x^1\,\vec{e}_1 + x^2\,\vec{e}_2 + x^3\,\vec{e}_3$$

$\vec{r}$ průvodič bodu A $\left[\begin{smallmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{smallmatrix}\right]$ (lineární) souřadnice bodu A

místo x^1, x^2, x^3 často používáme označení x, y, z

Souřadnice bodů

Lineární souřadnice

vztažná soustava: počátek P a souřadnicové osy dané lineárně nezávislými směry $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$A \;=\; P \;+\; \vec{r} \;=\; P \;+\; x^1\,\vec{e}_1 + x^2\,\vec{e}_2 + x^3\,\vec{e}_3$$

$\vec{r}$ průvodič bodu A $\qquad \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$ (lineární) souřadnice bodu A

místo x^1, x^2, x^3 často používáme označení x, y, z

Kartézské souřadnice

osy $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ tvoří ortonormální bázi (jsou na sebe kolmé a mají stejnou jednotku)

vzdálenost bodů v kartézských souřadnicích:

$$d(A,B) \;=\; |A-B| \;=\; \sqrt{\left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2} \;=\; \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

kde $\qquad \Delta x^j = x^j(B) - x^j(A)$

Rovina E^2

Polární souřadnice ρ, φ

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos\varphi & \qquad \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\
y &= \rho\sin\varphi & \qquad \tan\varphi &= \frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

Rovina E^2

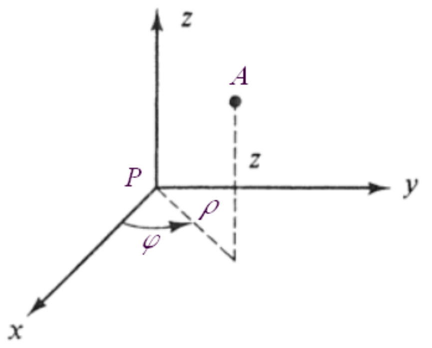
Polární souřadnice ρ, φ

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = \rho\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Prostor E^3

Cylindrické souřadnice ρ, φ, z

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = \rho\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$
$$z = z \qquad z = z$$

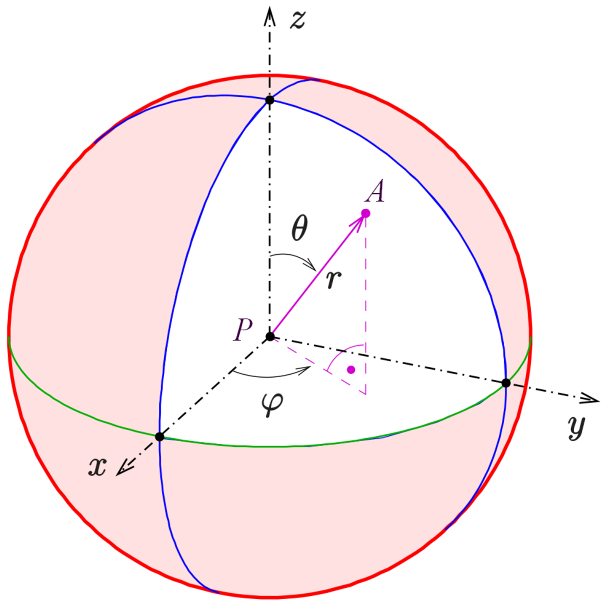


Rovina E^2

Polární souřadnice ρ, φ

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = \rho\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$



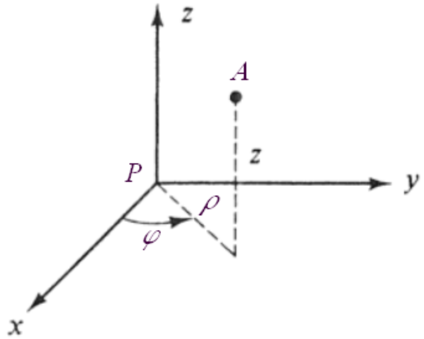
Prostor E^3

Cylindrické souřadnice ρ, φ, z

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = \rho\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$z = z \qquad z = z$$



Sférické souřadnice r, θ, φ

$$x = r\sin\theta\ \cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$y = r\sin\theta\ \sin\varphi \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{\rho}{z}$$

$$z = r\cos\theta \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$